1. Legyenek $p$ és $q$ olyan természetes számok, amelyekre fennáll, hogy

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}.$$

Bizonyítsa be, hogy $p$ osztható 1979-cel.

(NSZK, 6 pont)[1]

2. Adva van egy ötoldalú hasáb: alaplapja az $A_1A_2A_3A_4A_5$, fedőlapja pedig a $B_1B_2B_3B_4B_5$ ötszög. E két ötszög mindegyik oldalát, továbbá valamennyi $A_iB_j$ szakaszt ($i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ 5$) vörösre vagy zöldre színezzük. Minden olyan háromszögnek, amelynek csúcsai egyúttal a hasáb csúcspontjai is, és amelynek mindegyik oldala színezett, van két különböző színű oldala.

Mutassa meg, hogy ekkor az alaplapnak és a fedőlapnak összesen tíz oldala mind egyforma színű.

(Nagy-Britannia, 7 pont)

3. Adva van a síkban két egymást metsző körvonal: $k_1$ és $k_2$. Jelölje $A$ a két metszéspont egyikét. Két tömegpont: $P_1$ és $P_2$ mozog $k_1$-en, illetve $k_2$-n állandó sebességgel ugyanabban a forgási irányban. Mozgásukat egy időben kezdik az $A$ pontban, és egy-egy körüljárás után ismét egyidejűleg érkeznek az $A$ pontba.

Bizonyítsa be, hogy van a síkban olyan rögzített $P$ pont, amelyre a mozgás minden időpontjában érvényes a

$$PP_1 = PP_2$$

egyenlőség.

(Szovjetunió, 7 pont)

4. Adva van a $\Pi$ síkban egy $P$ és a $\Pi$ síkon kívül egy $Q$ pont. Határozza meg a $\Pi$ síknak valamennyi olyan $R$ pontját, amelyre a

$$\frac{QP + PR}{QR}$$

hányados értéke maximális.

(USA, 6 pont)

5. Határozza meg az összes $a$ valós számot, amelyekhez léteznek a

$$\sum_{k=1}^{5} kx_k = a, \quad \sum_{k=1}^{5} k^3x_k = a^2, \quad \sum_{k=1}^{5} k^5x_k = a^3$$

egyenlőségeket kielégítő $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ és $x_5$ nemnegatív valós számok.

(Izrael, 7 pont)

6. Legyen $A$ és $E$ egy szabályos nyolcszög két átellenes csúcsa. Egy béka az $A$ csúcsból kiindulva kezd ugrálni. A nyolcszög bármely csúcsából – az $E$-t kivéve – a mellette levő egyik csúcsba ugorhat. Ha az $E$ csúcsba ér, akkor megáll, és ott marad.

Legyen $a_n$ a pontosan $n$ ugrásból álló különböző utak száma.

Bizonyítsa be, hogy $a_{2n-1} = 0$, $a_{2n} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x^{n-1} - y^{n-1})$, $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, ahol $x = 2 + \sqrt{2}$ és $y = 2 - \sqrt{2}$.

*Megjegyzés:* Egy pontosan $n$ ugrásból álló út a csúcsoknak olyan $P_0,\ P_1,\ \ldots,\ P_n$ sorozata, amely eleget tesz az alábbi feltételeknek:

I. $P_0 = A$, $P_n = E$;

II. minden, $0 \le i \le n-1$ egyenlőtlenséget kielégítő $i$-re $P_i$ különbözik $E$-től;

III. minden, $0 \le i \le n-1$ egyenlőtlenséget kielégítő $i$-re $P_i$ és $P_{i+1}$ szomszédos csúcsok.

(NSZK, 7 pont)

*

A zsüri az egyetlen különdíjat a 3. feladat különösen elegáns és egyszerű megoldásáért LE BA KHANH TRINH 17 éves vietnami versenyzőnek adta ki. Az alábbi megoldás az ő dolgozatának alapján készült.

3. *Adva van a síkban két egymást metsző körvonal: $k_1$ és $k_2$. Jelölje $A$ a két metszéspont egyikét. Két tömegpont: $P_1$ és $P_2$ mozog $k_1$-en, illetve $k_2$-n állandó sebességgel ugyanabban a forgási irányban. Mozgásukat egyidőben kezdik az $A$ pontban, és egy-egy körüljárás után ismét egyidejűleg érkeznek az $A$ pontba.*

*Bizonyítsa be, hogy van a síkban olyan rögzített $P$ pont, amelyre a mozgás minden időpontjában érvényes a*

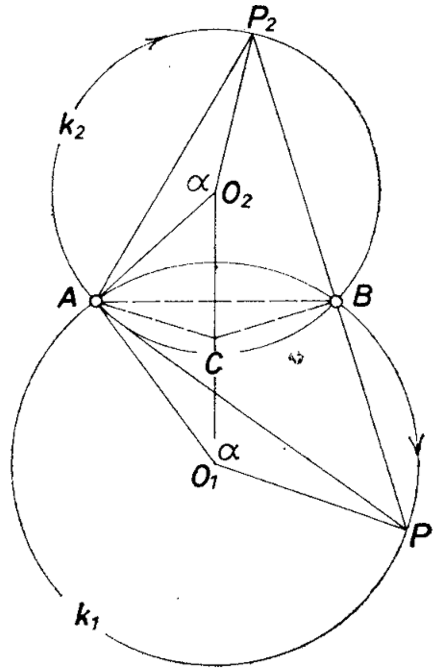
$$PP_1 = PP_2$$

*egyenlőség.*

[1] A zárójelben a javasló ország neve és a kapható maximális pontszám szerepel.

**Megoldás.** Jelöljük a $k_1$, ill. $k_2$ körök középpontját $O_1$-gyel, ill. $O_2$-vel, a két kör $A$-tól különböző metszéspontja legyen $B$. Először megmutatjuk, hogy a $P_1$, $P_2$, $B$ pontok a mozgás bármely pillanatában egy egyenesen vannak.

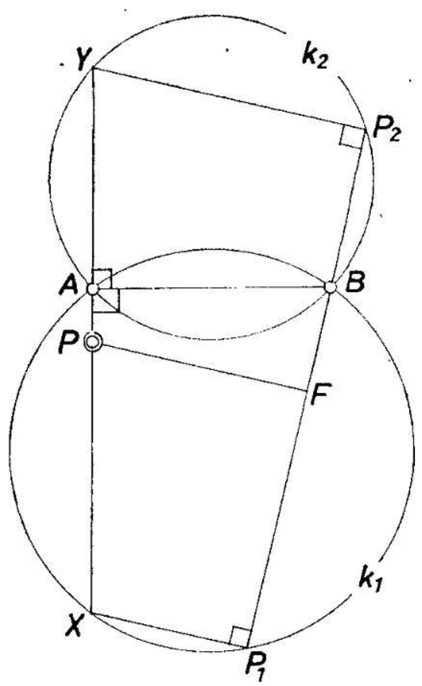
Ehhez figyeljük meg a következőket: ha az $AB_1C_1$, $AB_2C_2$, $AB_3C_3$, $\dots$ hasonló, és egyező körüljárású háromszögeknél a $B_1$, $B_2$, $B_3$, $\dots$ pontok egy egyenesen vannak, akkor a $C_1$, $C_2$, $C_3$, $\dots$ pontok is egy egyenesen fekszenek. Ez egyszerűen következik abból, hogy a $B_1$, $B_2$, $B_3, 1\dots$ pontokat az $A$ középpontú, $B_1AC_1$ szögű és $AC/AB$ arányú forgatvanyújtás viszi át rendre a $C_1$, $C_2$, $C_3$, $\dots$ pontokba, és a forgatvanyújtás egyenestartó. Ez igaz abban az esetben is, ha a hasonló háromszögek helyett egy egyenesbe eső hasonló ponthármasokat mondunk.




*1. ábra*

A feladat feltétele szerint a $P_1$, $P_2$ pontok a körök középpontjai körül állandó szögsebességgel forognak. Tegyük fel, hogy pl. a kiindulási $A$ helyzettől $\alpha$ szöggel fordultak el ($0 < \alpha < 2\pi$) (1. ábra). Az $AO_1P_1$, $AO_2P_2$ egyező körüljárású, hasonló, egyenlő szárú (esetleg elfajult) háromszögek. Mivel az $O_1O_2$ egyenes az $AB$ szakasz felező merőlegese, szerkeszthetünk rajta olyan $C$ pontot, hogy az $ACB$ és $AO_1P_1$ háromszögek hasonlóak és egyező körüljárásúak legyenek. Előző megjegyzésünk értelmében így a $P_1$, $P_2$, $B$ pontok valóban egy egyenesen vannak, mivel $O_1$, $O_2$, $C$ is egy egyenesen fekszenek.

Elegendő most már azt bizonyítanunk, hogy a $P_1P_2$ szakasz felező merőlegese – a $P_1P_2$ szakasz elhelyezkedésétől függetlenül – átmegy egy rögzített ponton. Messe az $AB$-re $A$-ban állított merőleges a $k_1$, ill. $k_2$ kört $X$-ben, ill. $Y$-ban, és legyen $XY$ felezőpontja $P$ (2. ábra).




*2. ábra*

A $BX$ és $BY$ szakaszok Thalész tétele szerint köreikben átmérők, ezért az $XP_1P_2\sphericalangle$ és $YP_2P_1\sphericalangle$ derékszög, az $XP_1P_2Y$ négyszög tehát derékszögű trapéz (hurkolt is lehet, és derékszögű háromszöggé is fajulhat). Következésképpen a $P_1P_2$ szár felező merőlegese átmegy a rögzített $XY$ szár $P$ felezési pontján; ezzel állításunkat igazoltuk.