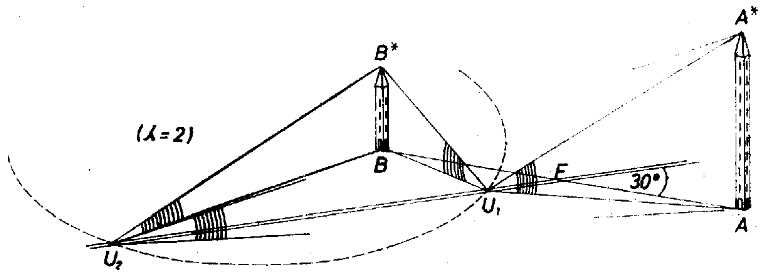
I. megoldás. Elég a $\lambda > 1$ értékekkel foglalkoznunk, mert ez – ha kell – a két torony sorrendjének fölcserélésével elérhető, ha pedig $\lambda = 1$, akkor nyilvánvalóan megfelel az A, B talppontok közti szakasz F felezőpontja, és más pont nem felel meg. (A mondott fölcserélés elérhető az F körüli 180°-os elfordítás útján is, és így az út önmagába megy át.)



1. ábra

A tornyok csúcsát rendre A^*-gal, B^*-gal és az út egy megfelelő pontját U-val jelölve az A^*UA és B^*UB derékszögű háromszögek a látószögek egyenlősége alapján hasonlók (1. ábra), ezért

$$UA : UB = AA^* : BB^* = \lambda, \quad UA > UB,$$

ennélfogva $UFB\sphericalangle = 30^\circ$, $UFA\sphericalangle = 150^\circ$. Legyen még $AB/2 = AF = a$ és $FU = x$, ekkor az UFA, UFB háromszögekből a cosinustétel alkalmazásával

$$\frac{UA^2}{UB^2} = \frac{x^2 + a^2 + \sqrt{3}ax}{x^2 + a^2 - \sqrt{3}ax} = \lambda^2,$$

és a szokásos lépésekkel

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}(\lambda^2+1)}{\lambda^2-1} \cdot \frac{x}{a} + 1 = 0, \tag{1}$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)_{1,2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1} \pm \sqrt{\frac{3}{4}\left(\frac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1}\right)^2 - 1}, \tag{2}$$

hacsak a gyökjel alatt nemnegatív szám áll. Ezzel meghatároztuk a kívánt tulajdonságú pontoknak az úton elfoglalt helyzetét, FA egységekben mérve.

2. A megoldások száma 0, 1, illetőleg 2 aszerint, hogy a D diszkrimináns negatív, 0, ill. pozitív. Ezt a föltételt kell úgy átalakítanunk, hogy közvetlenül λ értékéből adhassunk választ a kérdésre. Előrebocsátjuk, hogy a $\dfrac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1}$ hányados a $\lambda > 1$ föltevés folytán pozitív, így a $D \lesseqqgtr 0$ egyenlőtlenség λ-ra való megoldása esetszétválasztás nélkül halad:

$$\frac{3}{4}\left(\frac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1}\right)^2 - 1 \lesseqqgtr 0,$$

$$\frac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1} = 1 + \frac{2}{\lambda^2-1} \lesseqqgtr \frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$\frac{1}{\lambda^2-1} \lesseqqgtr \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}(2+\sqrt{3})},$$

$$\lambda^2 - 1 \gtreqqless 4\sqrt{3} + 6,$$

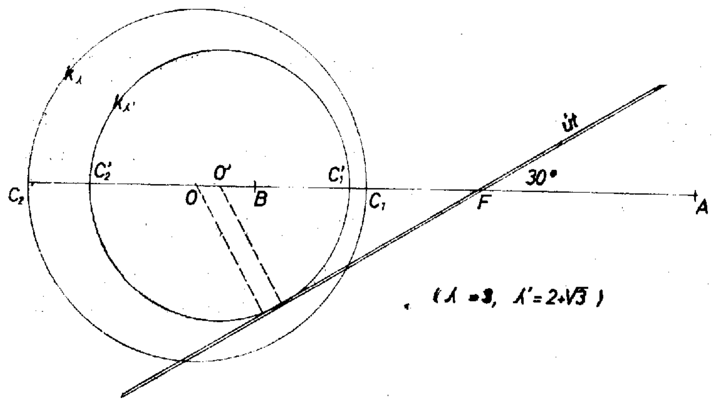
$$\lambda^2 \gtreqqless 7 + 4\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^2.$$

Ezek szerint $\lambda > 2 + \sqrt{3}$ esetén nincs megoldás U-ra, $\lambda = 2 + \sqrt{3}$ esetén egyetlen megoldás:

$$\frac{x}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1} = 1,$$

$1 < \lambda < 2 + \sqrt{3}$ esetén pedig 2 megoldás van, és mindkettő pozitív, hiszen (1) együtthatói szerint összegük is, szorzatuk is pozitív.

II. megoldás. Ismeretes, hogy – a fönti jelölésekkel – a síknak az $UA : UB = \lambda (> 1)$ föltételnek eleget tevő pontjai az A, B alappontokkal és a λ aránymutatóval meghatározott k_λ Apollóniosz-körön vannak. Ez szimmetrikus az AB egyenesre, az AB-n levő pontjai egy átmérőjét jelölik ki.



2. ábra

Az AB szakaszon levő (belső) C_1 osztópontra $C_1B = \dfrac{2a}{\lambda+1}$, a meghosszabbításon levő (külső) C_2-re $BC_2 = \dfrac{2a}{\lambda-1}$ (2. ábra), így az átmérő $C_1C_2 = C_1B + BC_2 = \dfrac{4\lambda a}{\lambda^2-1}$, az O középpont távolsága F-től

$$FO = FC_1 + \frac{C_1C_2}{2} = FB - C_1B + \frac{2\lambda a}{\lambda^2-1} = \frac{a(\lambda^2+1)}{\lambda^2-1},$$

az úttól pedig $FO \sin 30^\circ = FO/2$. Mármost a kör és az út közös pontjainak száma aszerint 2, 1, ill. 0, hogy ez a távolság kisebb, mint a kör sugara, ill. egyenlő vele, ill. nagyobb nála:

$$\frac{a(\lambda^2+1)}{2(\lambda^2-1)} \substack{<\\=\\>} \frac{2a\lambda}{\lambda^2-1},$$

azaz hogy

$$\lambda^2 + 1 \substack{<\\=\\>} 4\lambda.$$

Ebből ismét a fenti eredményt kapjuk.