A 2194. feladatban azt kellett igazolni, hogy tetszőleges $a,\ b,\ c$ valós számra az

$$f(x) = a\sin x + b\sin 2x + c\sin 4x \tag{1}$$

függvény értéke valamely x_0 helyen legalább $\frac{1}{2}(|a|+|b|+|c|)$. A megoldás (lásd a novemberi számunk 125. oldalán) azt sugallja, hogy az $1/2$ nem a lehető legjobb konstans, azaz van olyan $\lambda > 0{,}5$ szám is, hogy

$$f(x_0) \geq \lambda \cdot (|a|+|b|+|c|)$$

is teljesül valamely x_0-ra tetszőleges $a,\ b,\ c$ mellett. Jelöljük λ_0-lal az ilyen tulajdonságú λ-k maximumát. (Ez a maximum létezik.) A cikkben λ_0 értékét fogjuk meghatározni.

Az (1) alatti $f(x)$ periodikus függvény (2π biztosan periódusa), továbbá folytonos, ezért felveszi maximumát. A 2194. feladat állítása tehát ekvivalens azzal, hogy a

$$g_{a,\,b,\,c}(x) = \frac{f(x)}{|a|+|b|+|c|} = \frac{a\sin x + b\sin 2x + c\sin 4x}{|a|+|b|+|c|} \tag{2}$$

függvény x szerinti maximuma legalább $0{,}5$ tetszőleges $a,\ b,\ c$ számra. (Az $|a|+|b|+|c| = 0$ esetet, vagyis amikor $a=b=c=0$, most és a továbbiakban kizárjuk.) Jelöljük $g_{a,\,b,\,c}(x)$ maximumát, ami az előbbiek szerint létezik, és a, b és c-től függ, $h(a,\ b,\ c)$-vel. Ezekkel a jelölésekkel λ_0 a legnagyobb olyan szám, amelyre

$$h(a,\ b,\ c) \geq \lambda_0$$

minden $a,\ b,\ c$-re, azaz más jelöléssel

$$\lambda_0 = \inf_{a,\,b,\,c} h(a,\ b,\ c).$$

Igazak a következő állítások:

a) *ha* $\lambda > 0$ *tetszőleges szám, akkor* $h(\lambda a,\ \lambda b,\ \lambda c) = h(a,\ b,\ c)$;

b) $h(a,\ b,\ c) = h(-a,\ -b,\ -c) = h(-a,\ b,\ c)$;

c) $h(a,\ b,\ c) > 0{,}5877$, *sőt ha* b *és* c *különböző előjelűek, akkor* $h(a,b,c) \geq \sqrt{3}/2$.

Az a) állítás abból következik, hogy $g(x)$ értéke nem változik, ha benne $a,\ b,\ c$ helyébe rendre $\lambda a,\ \lambda b,\ \lambda c$-t teszünk. b) igazolásához tegyük fel, hogy $g_{a,\,b,\,c}(x)$ maximumát x_0-nál (is) felveszi, azaz

$$g_{a,\,b,\,c}(x) \leq g_{a,\,b,\,c}(x_0) = h(a,\ b,\ c)$$

tetszőleges x-re. Könnyen ellenőrizhető (2) alapján, hogy

$$g_{-a,-b,-c}(x) = g_{a,\,b,\,c}(-x)$$
$$g_{-a,b,c}(x) = g_{a,\,b,\,c}(x-\pi),$$

így tetszőleges x-re

$$g_{-a,-b,-c}(x) = g_{a,\,b,\,c}(-x) \leq g_{a,\,b,\,c}(x_0),$$

és egyenlőség áll $x = -x_0$ esetén, ami igazolja a $h(-a,\ -b,\ -c) = h(a,\ b,\ c)$ összefüggést. Hasonlóan

$$g_{-a,b,c}(x) = g_{a,\,b,\,c}(x-\pi) \leq g_{a,\,b,\,c}(x_0),$$

és egyenlőség áll $x = x_0 + \pi$ esetén, ami b) másik felét adja.

Az a) és b) állítások alapján h értékkészletének vizsgálatához elegendő az olyan $a,\ b,\ c$ számhármasokra szorítkoznunk, amelyeknél $|a|+|b|+|c| = 1$ és $a \geq 0$, $b \geq 0$. A továbbiakban ezt mindig feltesszük.

Ha b és c különböző előjelűek, akkor b) alapján feltehetjük, hogy $a \geq 0$, $b > 0$, $c < 0$ és ekkor

$$h(a,b,c) \geq g_{a,\,b,\,c}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + b\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + c\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{a+b-c} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

ha pedig b és c egyező előjelűek, akkor $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$ és

$$h(a,b,c) \geq g_{a,\,b,\,c}\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{a\sin\frac{\pi}{5} + b\sin\frac{2\pi}{5} + c\sin\frac{4\pi}{5}}{a+b+c} \geq \sin\frac{\pi}{5} > 0{,}5877,$$

hiszen

$$\sin\frac{\pi}{5}=\sin\frac{4\pi}{5}=\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{8}}\quad\text{és}\quad\sin\frac{2\pi}{5}=\sin\frac{\pi}{5}\cdot\frac{\sqrt5+1}{2}>\sin\frac{\pi}{5}.$$

Ezzel a 2194. feladat állításánál, miszerint $\lambda_0\ge 0{,}5$, többet is igazoltunk, nevezetesen azt, hogy $\lambda_0>0{,}5877$.

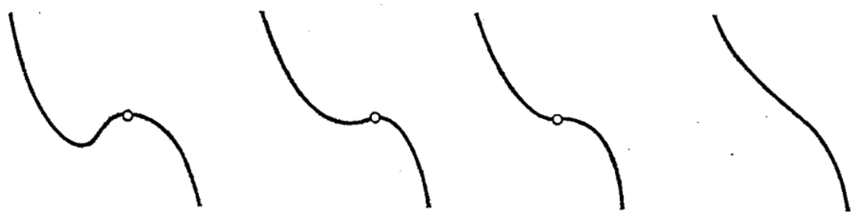
Abból, hogy $h(1,\ 0,\ 0)=h(0,\ 1,\ 0)=h(0,\ 0,\ 1)=1$, azonnal következik $\lambda_0\le 1$. Hogy λ_0-ra egy kicsit jobb felső becslést kapjunk, tekintsük a

$$4\sin x+2\sin 2x+\sin 4x \tag{3}$$

függvényt. Állítjuk, hogy ennek értéke legfeljebb 6, azaz

$$h\left(\frac47,\ \frac27,\ \frac17\right)\le\frac67,\qquad\text{amiből}\qquad\lambda_0\le\frac67<\frac{\sqrt3}{2}.$$

Valóban, ha egy x értékre $\sin x$, $\sin 2x$ és $\sin 4x$ nem mind pozitív, (3) értéke legfeljebb $4+2=6$. Ha pedig mind pozitív, akkor $2k\pi\le x\le 2k\pi+\frac{\pi}{4}$ valamilyen k egész számra, de ekkor $\sin x\le\frac{\sqrt2}{2}$, azaz (3) értéke nem több, mint $2\sqrt2+2+1<6$, ahogyan állítottuk.



1. ábra

A c) állítás értelmében $h(a,b,c)\ge\frac{\sqrt3}{2}$ ha b és c különböző előjelű, most pedig azt kaptuk, hogy $\lambda_0<\frac{\sqrt3}{2}$. Ez azt jelenti – az a) és b) állításokkal együtt –, hogy λ_0 meghatározásához *elegendő az* $a+b+c=1$, $a\ge0$, $b\ge0$, $c\ge0$ *feltételeknek eleget tevő számhármasokat vizsgálni.*

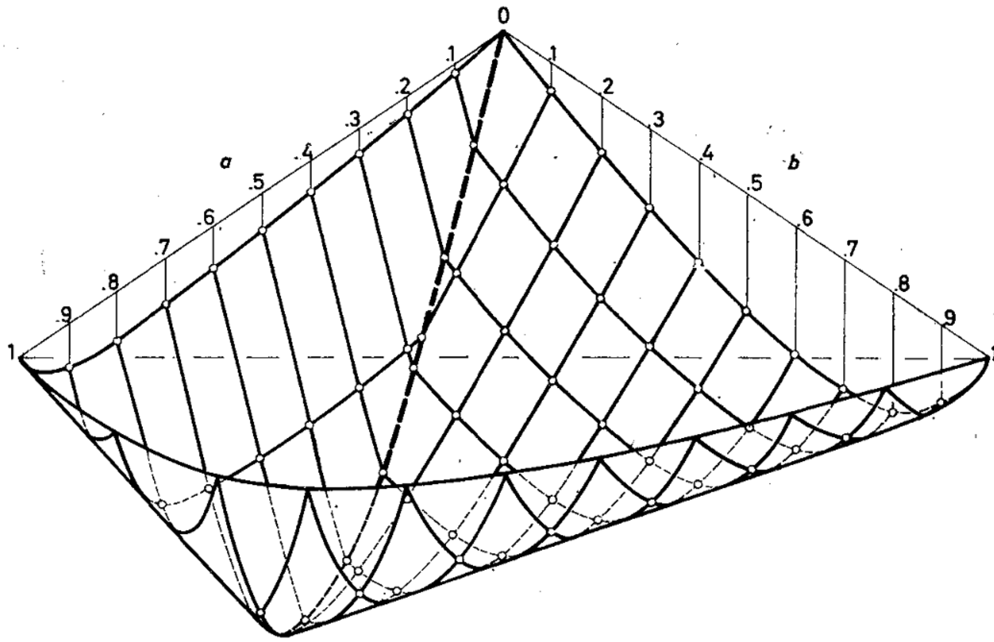
Térjünk vissza a (2) alatt definiált $g_{a,\,b,\,c}$ függvényhez, melynek alakja a fenti feltételek mellett

$$g_{a,\,b,\,c}(x)=a\sin x+b\sin 2x+c\sin 4x. \tag{4}$$

Ennek a függvénynek a $[0,2\pi)$ intervallumban (általában) 4 lokális maximuma van, és e négy helyen felvett érték maximuma adja meg $h(a,\ b,\ c)$ értékét. Most ha a, b, c értékét folyamatosan változtatjuk, akkor a (4) függvény lokális maximumhelyei, valamint az ott felvett értékek is a, b, c-vel együtt folytonosan, sőt differenciálható módon változnak. Azonban egy furcsa jelenségnek is szemtanúi lehetünk: lokális maximumok keletkeznek és eltűnnek. Egy lokális maximum eltűnését szemlélteti az *1. ábra*. Ahogyan a paraméterek változnak (esetünkben a, b és c), a maximumhely egyre közelebb kerül egy inflexiós ponthoz, majd mikor összeérnek, a maximum eltűnik. Így ha egy síkbeli koordináta-rendszer $(a,\ b)$ koordinátájú pontja fölé a térben a $g_{a,\ b,\ 1-a-b}(x)$ függvény lokális maximumainak értékeit felrajzoljuk, „sima” felületeket kapunk. A felületek metszik is egymást, ilyenkor $g(x)$ függvénynek két vagy több egyforma értékű lokális maximuma van. Az abszolút maximumot mindig a legfelső pont képviseli, így ezek a pontok, azaz $h(a,\ b,\ 1-a-b)$ értékei olyan felületet alkotnak, amely törésvonalak mentén összekapcsolt „sima” felületdarabokból áll.

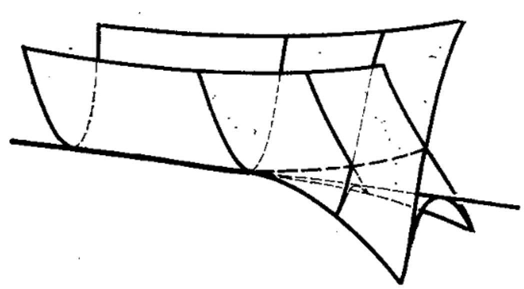
Ez a meggondolás mutatja, hogy a $H(a,\ b)=h(a,\ b,\ 1-a-b)$ kétváltozós függvény folytonos, de nem minden pontban deriválható (éppen a törésvonalak mentén nem). S mivel folytonos függvény korlátos zárt tartományon felveszi minimumát, azért

$$\lambda_0=\min_{\substack{a\ge0,\ b\ge0\\ a+b=1}}H(a,b).$$



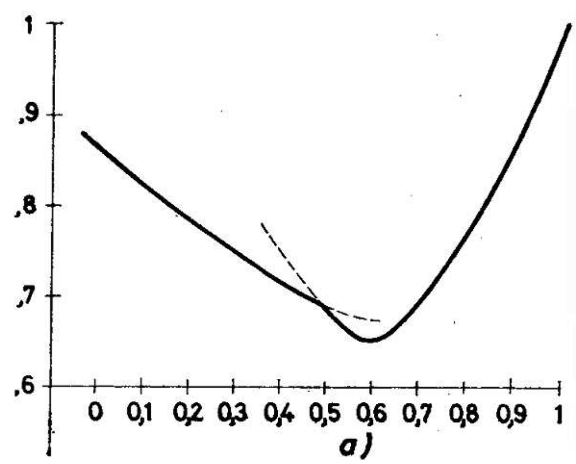
2. ábra

Így feladatunk $H(a,\ b)$ minimumának meghatározása. Ezt a felületet mutatja a *2. ábra.* A felső háromszöglap (amire az a és b értékeit mutató számok is kerültek) 1 magasságban van. Látható, hogy két sima felület kapcsolódik egymáshoz a szaggatottal jelölt törésvonal mentén. Azonban azokra az értékekre, amelyeknél $(a+b)$ 1-hez közel van, a két felületrész egymásba simul, a törésvonal eltűnik.

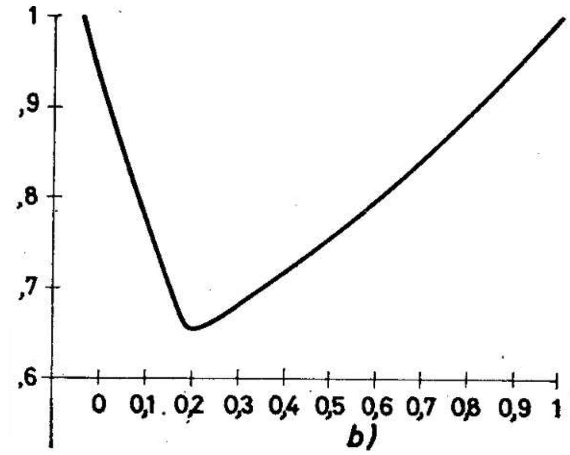


3. ábra

Ebben a pontban a felületnek ún. *szingularitása* van, a felület tulajdonságai hirtelen, ugrásszerűen megváltoznak. A felületek viselkedését ilyen szinguláris pont környezetében a *katasztrófaelmélet* vizsgálja. Ha nemcsak az abszolút maximumot, hanem az összes lokális szélsőértéket is berajzoljuk az ábrába, a szinguláris pont környezete (kicsit más nézőpontból) a *3. ábrán* láthatóhoz hasonló. A törésvonalat itt is vastag szaggatott vonallal húztuk ki. A felülettípus neve: *fecskefarok.*

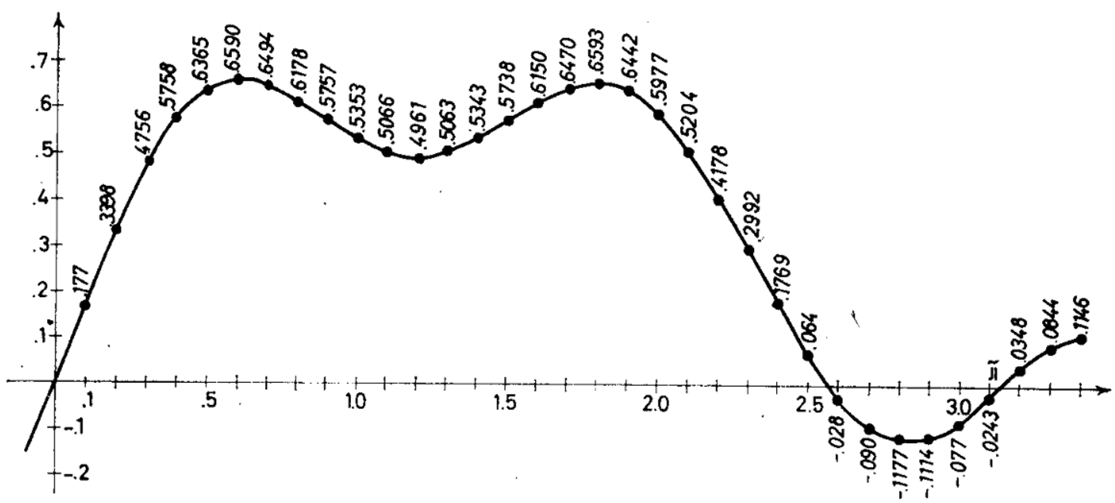


4. ábra



5. ábra

A *4. ábrán* az x-tengelyen a értékeit mértük fel, az y-tengelyen pedig rögzített a mellett a $0 \leq b \leq 1-a$ értékekre $H(a,b)$ minimumát (azaz a *2. ábra* b tengellyel párhuzamos szintvonalain a legalacsonyabban fekvő pont magasságát). A 0,5-nél levő töréspont azt jelzi, hogy ez a minimumhely a sima felületről átkerült a törésvonalra. Hasonlóan az *5. ábrán* rögzített b mellett készítettük el a minimumot. Az ábrákról leolvasható, hogy $\lambda \approx 0{,}65$ és ezt az értéket az $a_0 \approx 0{,}6$, $b_0 \approx 0{,}2$ értékeknél veszi fel. Pontosabb számítások azt mutatják, hogy $\lambda_0 = 0{,}659\,420$, $a_0 = 0{,}6040$, $b_0 = 0{,}1966$. Az ezekhez az értékekhez tartozó $g(x)$ függvény képét láthatjuk a *6. ábra*.



6. ábra