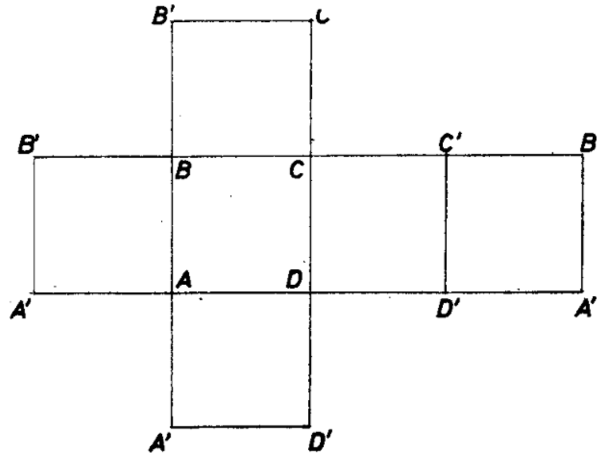
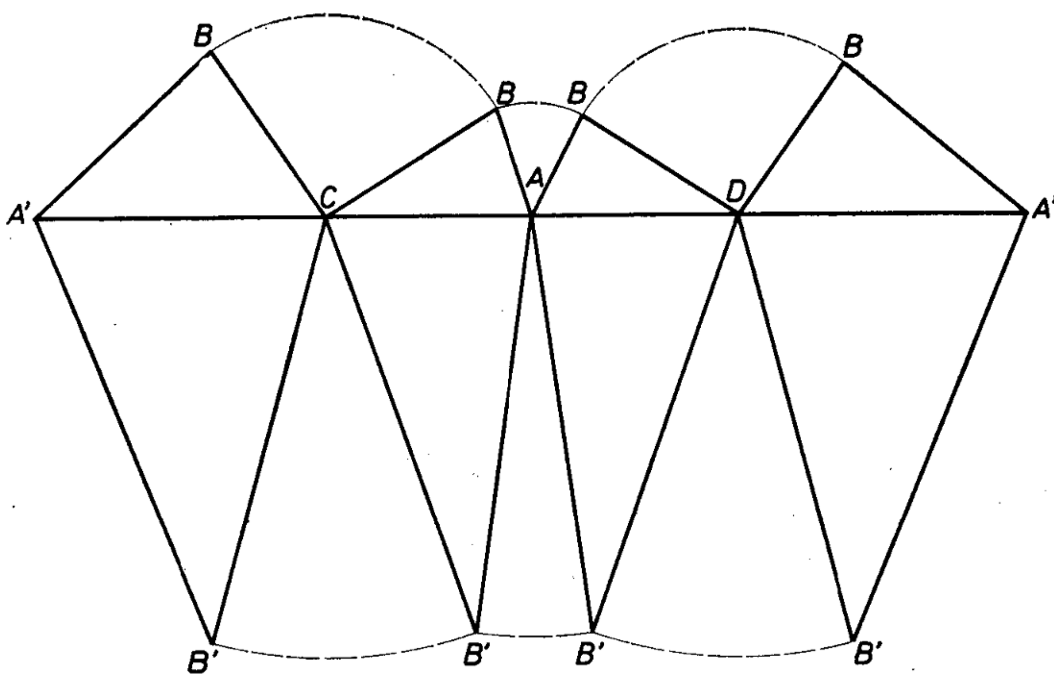
Töprengett-e már az olvasó azon, hogy amikor egy poliédert (sokszöglapokkal határolt testet) hálózatával[1] definiálunk, megadjuk-e ezzel egyáltalán a testet?



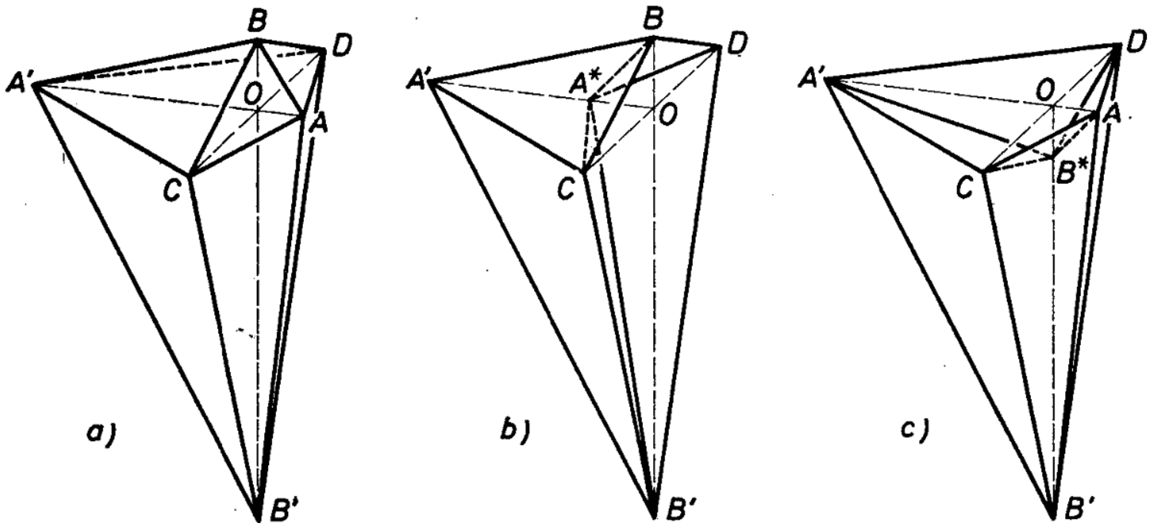
1. ábra

Az *1. ábrán* látható hálózatból csak egyetlen test állítható össze, a kocka. Ugyanakkor a *2. ábra* hálózatából már három különböző poliéder is összeállítható: egy konvex és két konkáv (*3. ábra*). Ez a példa is mutatja, hogy a hálózat általában nem definiálja egyértelműen a poliédert, az összeillesztésnél több különböző lehetőségünk van, bár az egy csúcsban összefutó lapok, és azok sorrendje adott. De az összerakott (összeragasztott) lapokból keletkező testek már *merevek:* ha modelljeinkben bármelyik három csúcsot rögzítjük, semelyik további csúcs nem mozoghat. Ahhoz, hogy a konkáv testek „horpadásait" kipattinthassuk, már a papír rugalmasságát kell kihasználnunk. A pattintás közben az oldallapok átmenetileg megszűnnek síklapok lenni. Merevségen tehát azt értjük, hogy amennyiben a poliéder lapjai adott síklapok, és bár ezek a lapok csuklósan vannak az élek mentén összeillesztve, azaz a lapok az élek körül szabadon elfordulhatnának, a poliéder csúcsait mégsem tudjuk egymáshoz képest mozgatni.



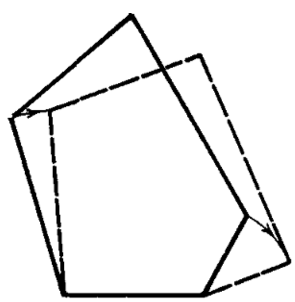
2. ábra

[1] A *hálózat* helyett a *lapgráf* kifejezést kellene használnunk, hiszen nem csupán a poliéder síkba kiterített lapjait gondoljuk megadottnak, hanem azt is, hogy a lapok hogyan csatlakoznak egymáshoz. Ennek ellenére megmaradunk a szemléletesebb hálózat kifejezésnél.

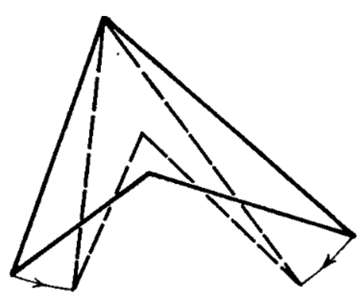


3. ábra

Az előbbi definíciónak síkbeli megfelelője az lehetne, hogy egy sokszög akkor merev, ha oldalszakaszai a csúcsokban csuklósan találkoznak és a sokszög csúcsainak a kölcsönös helyzete ennek ellenére nem változtatható meg. Eszerint a háromszög volna az egyetlen síkbeli merev sokszög. Ennek fényében még inkább meglepő a poliéderek tapasztalt merevsége. Hátha csak bizonyos „szép" tulajdonságú poliéderek merevek, a legtöbbjük pedig nem az? Nos, Augustin-Louis *Cauchy* (1789–1857) neves francia matematikus 1813-ban bizonyította, hogy minden konvex poliéder merev. Sőt ennél többet mutatott meg, nevezetesen azt, hogy adott hálózatból legfeljebb egy test állítható össze. Így a *2. ábra* hálózatából is csak egyetlen konvex poliédert kaphatunk (3*a ábra*), míg konkávból már kettőt (3*b, c ábrák*). Az állítás bizonyítása megtalálható például *Skljarszkij – Csencov – Jaglom:* Válogatott feladatok, 3., Geometria II. (Sztereometria) című könyvének 58. feladatában.

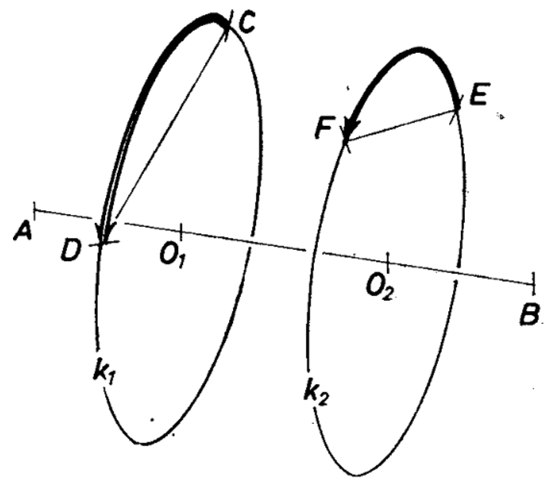


4. ábra



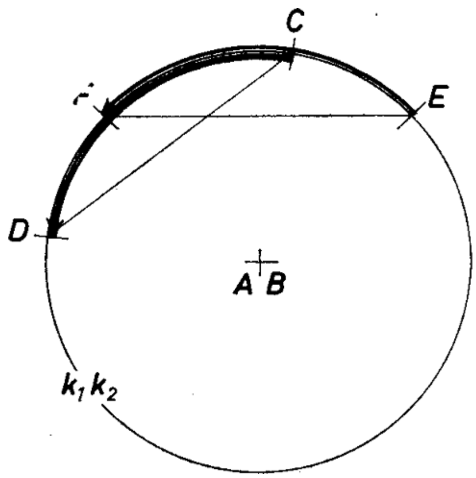
5. ábra

Több mint másfél évszázadon keresztül próbálták Cauchynak ezt a tételét konkáv poliéderekre is átvinni, vagy pedig ellenpéldát keresni. Cauchy tételének bizonyítása azon a tényen alapszik, hogy ha egy konvex sokszöget az oldalhosszak megtartásával úgy deformálunk, hogy továbbra is konvex maradjon (*4. ábra*), akkor legalább 2 szöge csökken és legalább 2 szöge nő. Ez azonban konkáv sokszögekre már nem marad érvényben, például az *5. ábrán* a három hegyesszög csökkent és csak a konkáv szög nőtt. Ez az oka annak, hogy a bizonyítást nem lehetett konkáv poliéderekre is átvinni. Végül 1978-ban Robert *Connelly* konstruált egy nem merev konkáv poliédert. A továbbiakban egy ilyen, csupa háromszöglapokkal határolt testet írunk le. Ezt a testet Klaus *Steffen* találta meg.



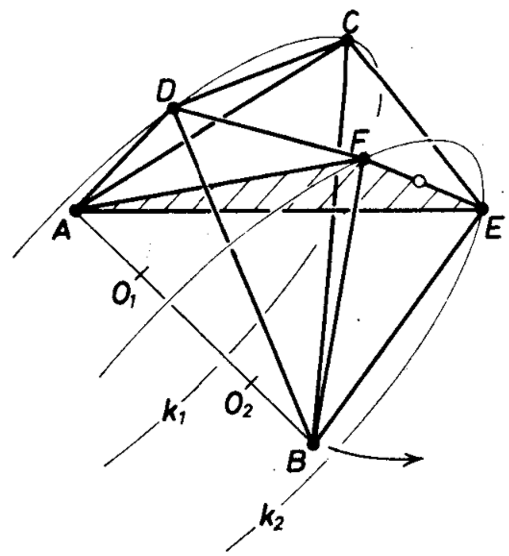
6. ábra

Tekintsünk a térben két pontot, A-t és B-t. Azon pontok mértani helye, melyek A-tól adott a, B-től pedig b távolságra vannak, egy k_1 körvonal, ha $a + b > AB$. Ennek síkja merőleges az AB egyenesre (*6. ábra*). Hasonlóan legyen k_2 az a körvonal, melynek pontjai A-tól b, B-től pedig a távolságra vannak. Világos, hogy k_1 és k_2 egybevágóak és az AB szakasz felezőpontjára tükrösek. Válasszunk ki a k_1 körvonalon két pontot, C-t és D-t, a k_2 körvonalon pedig válasszuk az E és F pontokat úgy, hogy a CD ív és az EF ív egyenlő és egyező körüljárású legyen. Ezt úgy értjük, hogy az AB tengely valamelyik irányából nézve (a végtelenből) ugyanakkora és egyező irányú elforgatás vigye át C-t a D-be és E-t az F-be (*7. ábra*). Ekkor a CD és EF szakaszok egyenlőek, sőt a CE és DF szakaszok is, hiszen az $ACEB$ töröttvonalat az AB tengely körül alkalmas szöggel elforgatva az $ADFB$ töröttvonalat kapjuk.

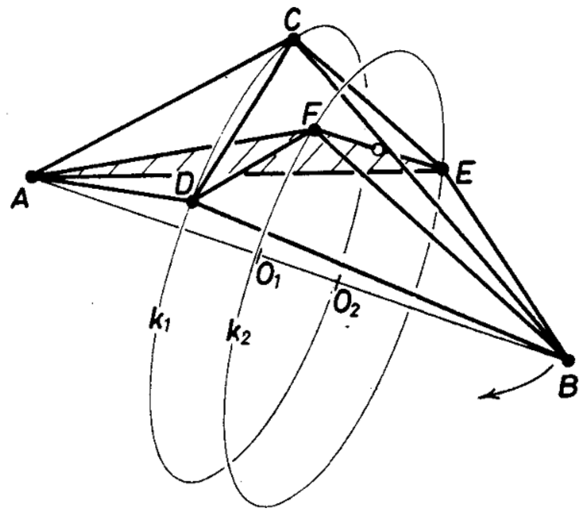


7. ábra

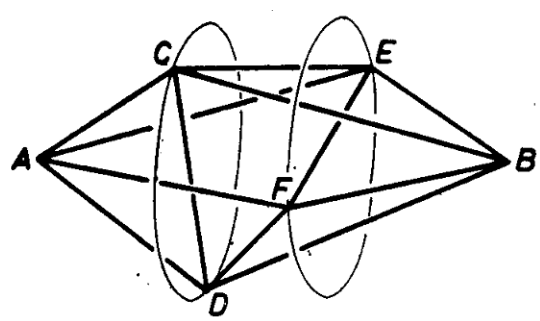
Így ha az AC, CB, AD, DB, AE, EB, AF, FB, CD, EF és CE szakaszok helyére merev rudakat teszünk (ez összesen 11 rúd), a rudak végpontjait csuklókkal illesztjük össze, az A és B pontokat bizonyos korlátok között közelíthetjük, illetve távolíthatjuk egymástól. A-t és B-t távolítva k_1 és k_2 átmérője csökken, és csökken a síkjaik közti távolság is. A fix CE rúd miatt nő az elfordulás CD és EF között (*8., 9. ábra*). Eközben a fenti meggondolás alapján a DF távolság nem változik, így a D és F pontok közé is illeszthetünk egy rudat, a rendszer mozgathatósága megmarad. A mozgathatóságot úgy is gondolhatjuk, hogy az A, E, F pontokat rögzítve a B pontot fel-le mozgathatjuk (*10. ábra*).



8. ábra

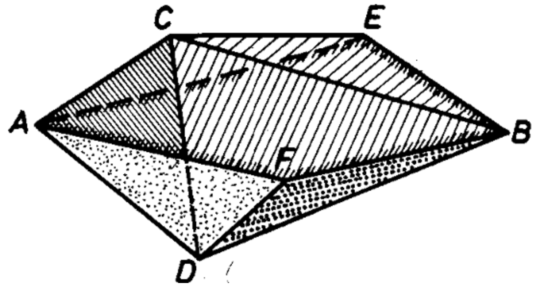


9. ábra



10. ábra

A rudak méreteinek ügyes megválasztásával elérhetjük, hogy az ACE, ACD, ADF, BEC, BDC, BDF háromszöglapokat feltéve a csuklós rendszerünkre (*11. ábra*) egy, az $AEBF$ torz négyszögre illeszkedő nyitott felületet kapjunk. Például $a = 10$ cm, $b = 12$ cm, $CD = 11$ cm és $CE = 5$ cm megfelelő lesz. Minthogy a háromszöglapok oldalszakaszai az előbbi csuklós rendszer rúdjai közül kerülnek ki, ez a felület is olyan marad, hogy az A, E, F pontokat rögzítve a B pont fel és le mozgatható, a lapok alakváltozás nélkül követik a B pont mozgását.

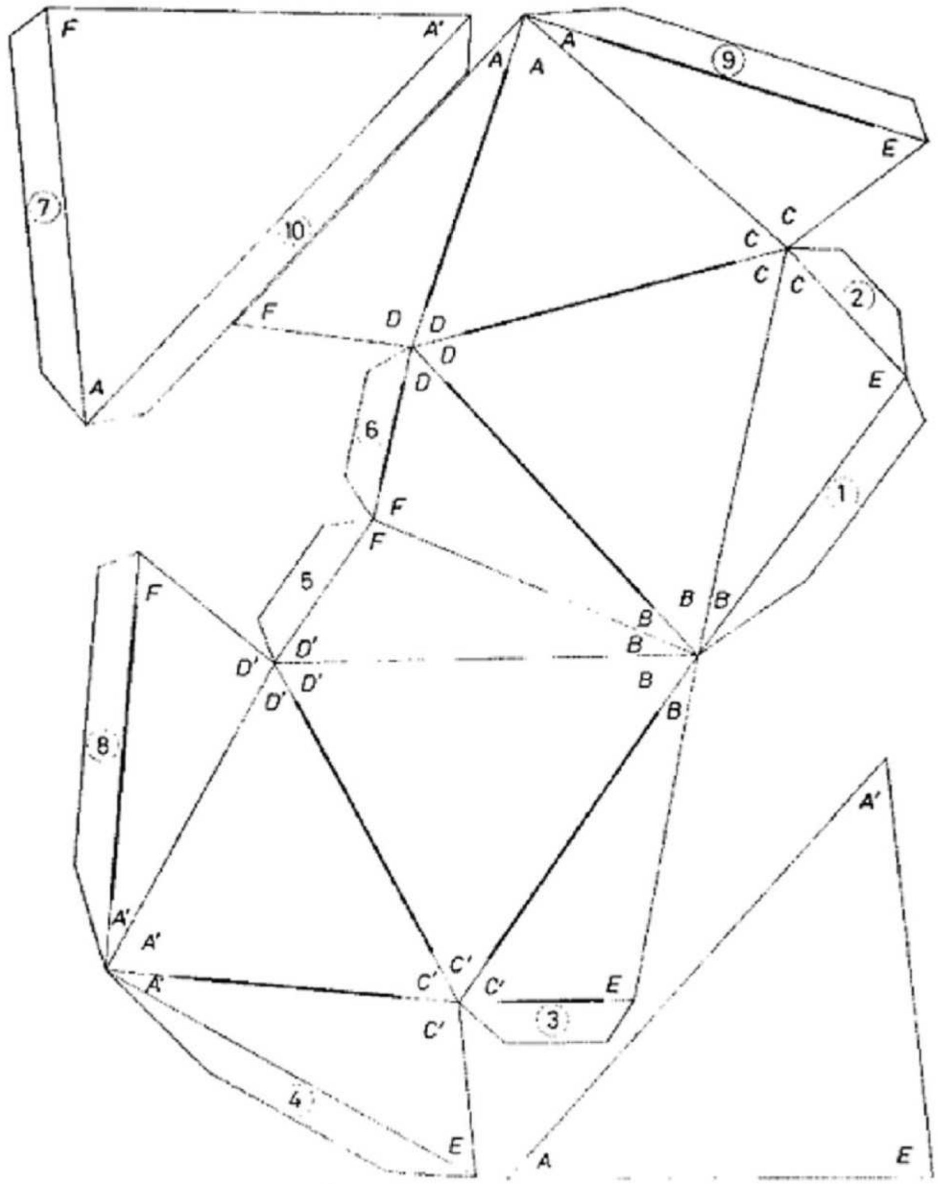


11. ábra

Készítsük el két példányban ezt a felületet. Helyezzük egymásra azokat és ragasszuk össze a két felületet a BE, valamint BF élek mentén. Ezután az A csúcsnál óvatosan húzzuk szét. Az „alap" $ABCDEF$ felett kapunk egy $A'BC'D'EF$ „fedőlapot". Amíg az A és A' csúcsok távolsága kb. 10 cm-nél kisebb, addig a BCD és $BC'D'$ lapok összesimulnak és a testet merevvé teszik. Ha azonban ez a távolság úgy $15-16$ cm-re nő, az alap- és a fedőlap szabaddá, egymáshoz képest mozgathatóvá válik. A keletkezett $AA'E$ és $AA'F$ háromszöglapokat beragasztva (válasszuk AA'-t 16 cm-nek) máris előttünk áll egy nem merev poliéder. Ennek 9 csúcsa, 14 lapja (mindegyik háromszöglap) és 21 éle van. Ha rögzítjük az A, A', E és F csúcsokat, akkor a B csúcsot folytonosan mozgathatjuk (addig, amíg a poliéder lapjai össze nem akadnak), hiszen a végén beillesztett $AA'E$ és $AA'F$ lapok változatlanok, a poliéder alsó és felső „kosara" pedig külön-külön, tehát egyszerre is mozgatható.

Hátsó borítónkon a test teljes hálózata látható, nagyjából feleakkora méretben, mint amekkorát megadtunk. A felületre írt számok az összeragasztás sorrendjét jelzik. A vastagon kihúzott élek mentén a lapszögek konkávak, azokat az ellenkező irányba kell behajtani, mint a többi élt.

Csirmaz László



A hátsó borító ábrája