1. *Be nem épített függvények*

Van egy zsebszámítógépem, HT TK – 1024 a neve, magyar gyártmány. Sok mindent tud: leütöm az x-et, egy-egy billentyű benyomására kiszámítja x^2-et, $\sqrt{x}$-et, $\sin - \cos - \operatorname{tg} x$-et, $\frac{1}{x}$-et stb. Egy billentyű benyomására megjelenik a π értéke 9 tizedes jegyre kerekítve, tud összeadni–kivonni–szorozni–osztani.

Ezenkívül a sin, cos, tg szögfüggvények adott értékéből a szögek meghatározása is egy-egy gomb megnyomásával történhet. Adott szögfüggvényértékhez végtelen sok különböző szög tartozik, a kalkulátor azonban csak egyetlen értéket tud kijelezni. Ez az érték az ún. *főérték*, szokásos jele és értékkészlete

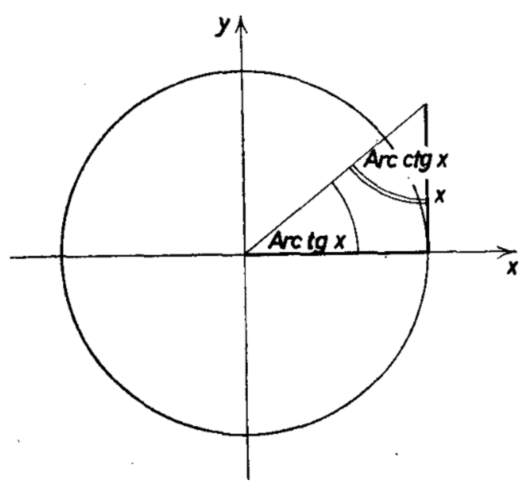
$$-\frac{\pi}{2} \le \operatorname{Arc} \sin x \le \frac{\pi}{2}$$
$$0 \le \operatorname{Arc} \cos x \le \pi$$
$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arc} \operatorname{tg} x < \frac{\pi}{2}.$$

Így például a $\operatorname{tg} x = 1$ értékből a gép egyedül az $x = 0{,}78\ldots$ szöget keresi vissza, ebből nekünk kell a többi szögértéket meghatároznunk: $x \approx 0{,}78 + k\pi$, ahol k tetszőleges egész.

Sajnos, a kalkulátorban nincs $\operatorname{Arc} \operatorname{ctg} x$*-et számító szubrutin, adott* $\operatorname{ctg} x$ *értékből* x*-et nem lehet közvetlenül visszakeresni.* Pedig a gyakorlatban erre is szükség lehet.

Ha rövid a kardod, toldd meg egy lépéssel – tartja a közmondás. *Hogyan lehetne az eddig felsorolt szubrutinok segítségével adott* $\operatorname{ctg} x = a$ *értékből* x *főértékét,* $\operatorname{Arc} \operatorname{tg} a$*-t meghatározni*? Definíció szerint a főérték 0 és π közti érték:

$$0 < \operatorname{Arc} \operatorname{ctg} x < \pi.$$



1. ábra

I. Gondoljuk végig: az egységsugarú, origó középpontú körben $\operatorname{Arc} \operatorname{tg} x$ azt a szöget jelenti, amelynek a tangense x (ez az 1. ábrán az egyíves szög). $\operatorname{Arc} \operatorname{ctg} x$ azt a szöget jelenti, amelynek a cotangense x (ez az 1. ábrán a kétíves szög). Ha $0 < \operatorname{Arc} \operatorname{tg} x < \frac{\pi}{2}$, a két szög egy derékszögű háromszög két hegyesszöge, ezek összege tehát $\frac{\pi}{2}$:

$$\operatorname{Arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{Arc} \operatorname{ctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

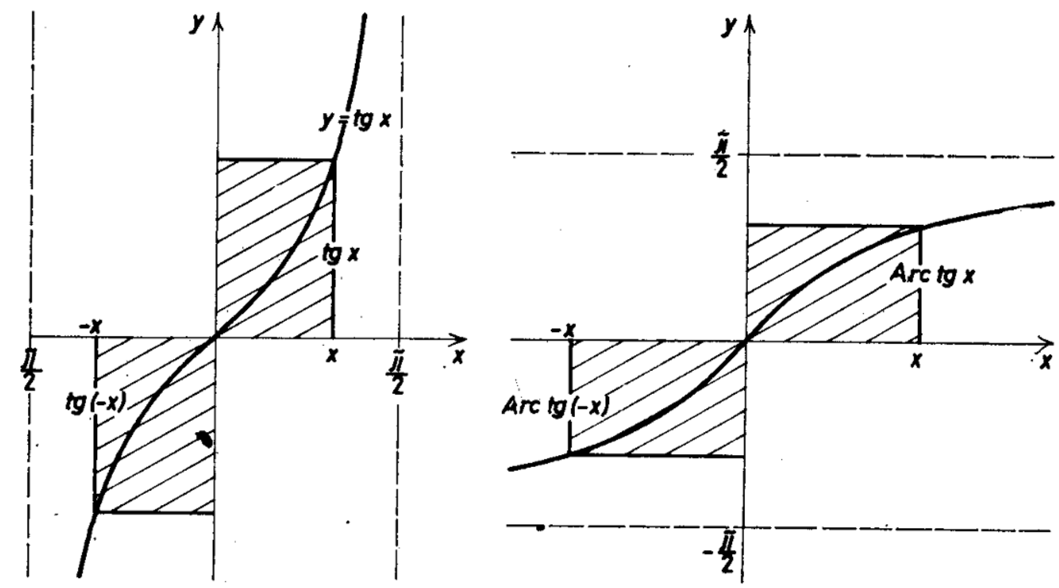
Érvényes-e ez negatív szögre is? Igen, mert $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$, $|\operatorname{Arc} \operatorname{tg} x| < \frac{\pi}{2}$ miatt

$$\operatorname{Arc} \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{Arc} \operatorname{tg} x$$

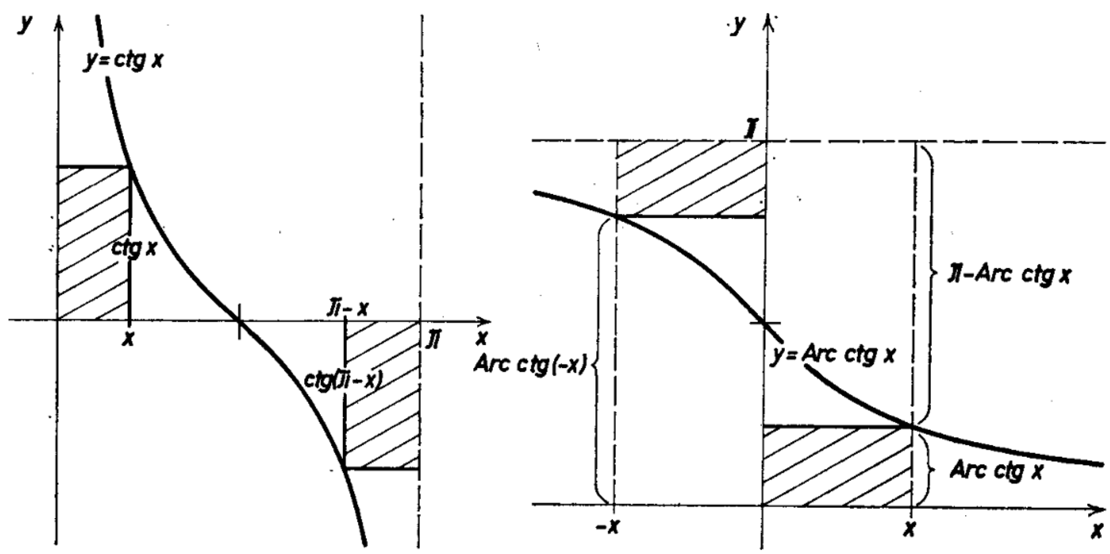
(lásd a 2. ábrát), és $\operatorname{ctg}(\pi - x) = -\operatorname{ctg} x$, $0 < \operatorname{Arc} \operatorname{ctg} x < \pi$ miatt

$$\operatorname{Arc} \operatorname{ctg}(-x) = \pi - \operatorname{Arc} \operatorname{ctg} x$$

(lásd a 3. ábrát).



2. ábra



3. ábra

A két utóbbi egyenlőséget összeadva és rendezve azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{Arc}\operatorname{ctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc}\operatorname{tg} x,$$

ez *az összefüggés* tehát *érvényes minden x-re.*

Így ez módot ad arra, hogy a kalkulátor meglevő szubrutinjaival adott $\operatorname{ctg} x$ értékből x-et visszakeressük. Például:

$$\operatorname{ctg} x = 0{,}5 \quad x = \operatorname{Arc}\operatorname{ctg} 0{,}5 + k \cdot \pi = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc}\operatorname{tg} 0{,}5 + k\pi \approx 1{,}107\,148\,718 + k\pi.$$

II. Készítsünk egy másik módszert is, más szubrutinok bevonásával.

Ha $x > 0$, akkor $0 < \operatorname{Arc}\operatorname{ctg} x < \dfrac{\pi}{2}$ és

$$\operatorname{tg}(\operatorname{Arc}\operatorname{ctg} x) = \frac{1}{\operatorname{ctg}(\operatorname{Arc}\operatorname{ctg} x)} = \frac{1}{x}.$$

Ha egy 0 és $\dfrac{\pi}{2}$ közti szám tangense $\dfrac{1}{x}$, akkor az a szám $\operatorname{Arc}\operatorname{tg}\dfrac{1}{x}$-szel egyenlő:

$$\operatorname{Arc}\operatorname{ctg} x = \operatorname{Arc}\operatorname{tg}\frac{1}{x}, \qquad \text{ha} \qquad x > 0.$$

Ha $x < 0$, akkor $\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arc\,ctg} x < \pi$, de most is

$$\operatorname{tg}(\operatorname{Arc\,ctg} x) = \frac{1}{\operatorname{ctg}(\operatorname{Arc\,ctg} x)} = \frac{1}{x}.$$

Ebből $\operatorname{Arc\,ctg} x = \operatorname{Arc\,tg}\frac{1}{x} + k\pi$ következik, ahol $k = 1$, hiszen most $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arc\,tg}\frac{1}{x} < 0$, $\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arc\,ctg} x < \pi$. Tehát

$$\operatorname{Arc\,ctg} x = \operatorname{Arc\,tg}\frac{1}{x} + \pi, \quad \text{ha} \quad x < 0.$$

Ezek az eredmények azt mutatják, hogy $\operatorname{Arc\,ctg} x$ értékét az $\frac{1}{x}$, az Arc tg, a π és az összeadó szubrutinok segítségével is meghatározhatjuk. Például:

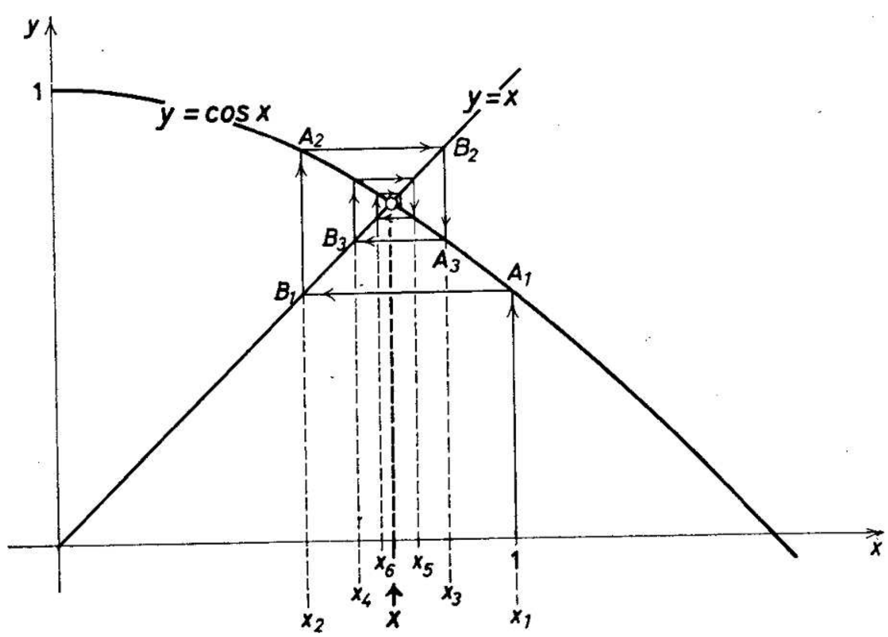
$$\begin{aligned}
&\operatorname{ctg} x = -0{,}35,\\
&\quad x = \operatorname{Arc\,ctg}(-0{,}35) + k\pi = \operatorname{Arc\,tg}\left(-\frac{1}{0{,}35}\right) + (k+1)\pi \approx\\
&\quad \approx -1{,}234\,121\,507 + (k+1)\pi.
\end{aligned}$$

2. *Egyenletek megoldása*

Játsszunk egy kicsit a kalkulátorral. Vigyünk be 1 radiánt és vegyük ennek a cosinusát. A kapott értéknek is vegyük a cosinusát, majd az így kapott értéknek is számítsuk ki a cosinusát és így tovább. A cos-gomb nyomogatásával az alábbi számsorozatot kaptuk:

Sorszám	x_i	$\cos x_i$
1.	1,	0,540 302 3059
2.	0,540 302 3059	0,857 553 2158
3.	0,857 553 2158	0,654 289 7905
4.	0,654 289 7905	0,793 480 3587
...	...	...
58.	0,739 085 1333	0,739 085 1332
59.	0,739 085 1332	0,739 085 1332

Így voltaképpen adott x_i értékből $\cos x_i$-t számoltuk ki, azután az $x_{i+1} = \cos x_i$ értékből $\cos x_{i+1}$-et ($i = 1, 2, 3, \ldots$).



4. ábra

A 4. ábra vázlatosan mutatja eljárásunkat. Először az $y = \cos x$ görbén megkeressük az $A_1(x_1; \cos x_1)$ pontot, ezt az x tengellyel párhuzamosan rávetítjük az $y = x$ egyenesen levő B_1 pontra, ezt fölvetítjük y tengellyel párhuzamosan a $\cos x$ görbén levő $A_2(x_2;\cos x_2)$ pontra, és így tovább. Az $A_1B_1A_2B_2A_3B_3\dots$ töröttvonal fokozatosan egy pontot közelít meg, az $y=\cos x$ és $y=x$ metszéspontját.

Az eljárással (úgynevezett „iteráció"-val) az

$$x=\cos x$$

egyenlet megoldását határoztuk meg egyre pontosabban. Az x_1, x_2, x_3, … abszcissza-sorozat egyre nagyobb pontossággal közelíti meg az $x=\cos x$ egyenlet gyökét.

Az 59. lépésben kapott x_{59} a gép tanúsága szerint már megegyezik $\cos x_{59}$-cel, ezzel a kalkulátorral tehát az eljárás nem javít tovább a gyök pontosságán, az $x=\cos x$ egyenlet megoldása

$$x\approx 0{,}739\,085\,133\,2.$$

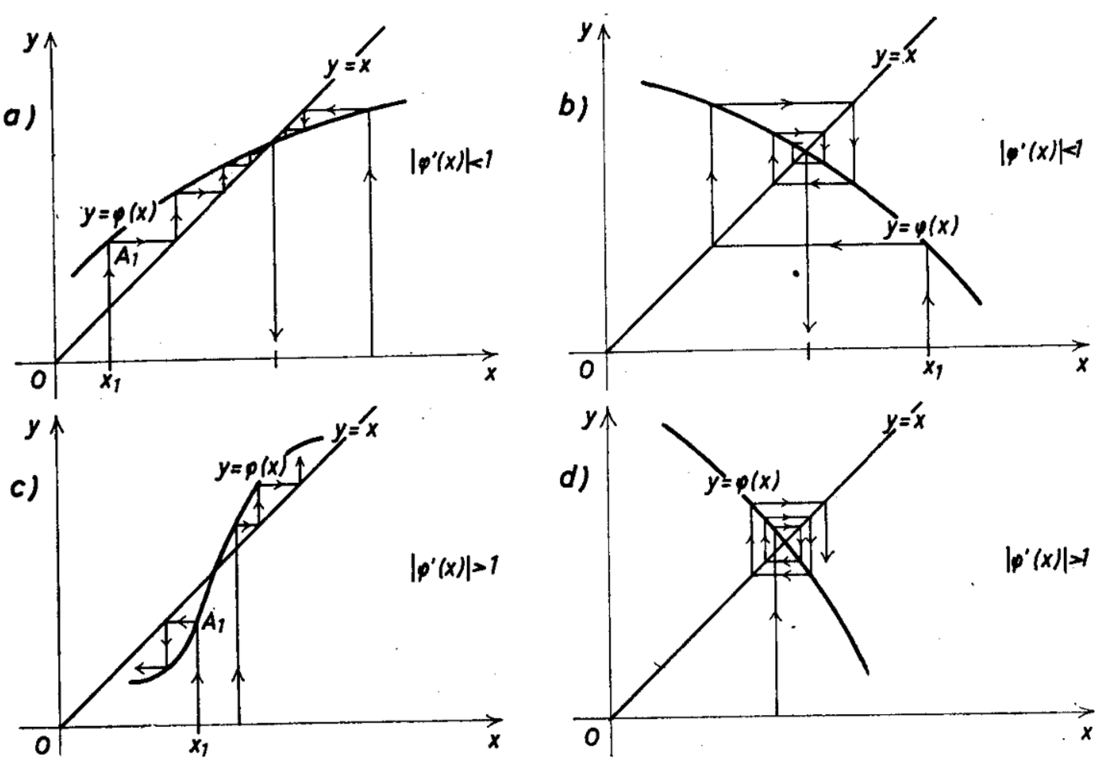
Az eljárást alkalmazhatjuk más

$$x=\varphi(x)$$

alakú egyenletek megoldására is. A kapott sorozat egyre nagyobb pontossággal megközelíti az egyenlet gyökét, ha a $\varphi(x)$ „elég laposan" metszi át az $y=x$ egyenest, pontosabban: ha az érintőjének iránytangense, $\varphi'(x)$ abszolút értékben kisebb 1-nél a gyökhely környezetében:

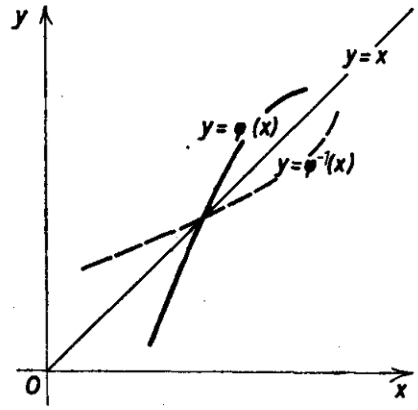
$$|\varphi'(x)|<1,$$

azaz a gyökhely környezetében az érintő hajlásszöge $-45°$ és $+45°$ között mozog (5*a*, *b* ábra). Az eljárás nem vezet a gyökhöz, ha $|\varphi'(x)|>1$, (5*c*, *d* ábra).



5. ábra

Mit tehetünk, ha $|\varphi'(x)|>1$? A 6. ábra mutatja, hogy az $y=\varphi(x)$ és inverze, $y=\varphi^{-1}(x)$ ugyanazon pontban metszik az $y=x$ egyenest (persze, mert egyik a másiknak tükörképe az $y=x$ egyenesre). Ha $|\varphi'(x)|>1$, akkor $|[\varphi^{-1}(x)]'|<1$ lesz a gyökhely környezetében. Így az iterációval az $x=\varphi(x)$ egyenlet helyett az $x=\varphi^{-1}(x)$ egyenletet oldhatjuk meg.



6. ábra

Nézzük például az $x + \ln x = 0$ egyenletet. (Itt $\ln x$ természetes logaritmus, e alapú logaritmus.)

Az $x = -\ln x$ helyett (mivel $-\ln x$ deriváltja abszolút értékben $\left|-\dfrac{1}{x}\right| > 1$ a 0 és 1 közt keresendő gyökhely környezetében) az $x = e^{-x}$ egyenletből érdemes kiindulnunk. Itt az e^x, $\dfrac{1}{x}$ szubrutinok felhasználásával számíthatjuk ki a szükséges értékeket.

	x	e^x	$\dfrac{1}{e^x}$
1.	0,5	1,648 721 271	0,606 530 659 7
2.	0,606 530 659 7	...	0,545 239 211 9
3.	0,545 239 211 9	...	0,579 703 094 9
4.	...	...	0,560 064 627 9
5.	...	...	0,571 172 149 0
6.	...	...	0,564 862 947 0
	...	...	...
37.			0,567 143 290 5
38.			0,567 143 290 4
39.			0,567 143 290 4

A kalkulátorral tovább nem javítható a gyökközelítés, az $x + \ln x = 0$ egyenlet gyöke

$$x \approx 0{,}567\,143\,290\,4.$$

Lukács Ottó