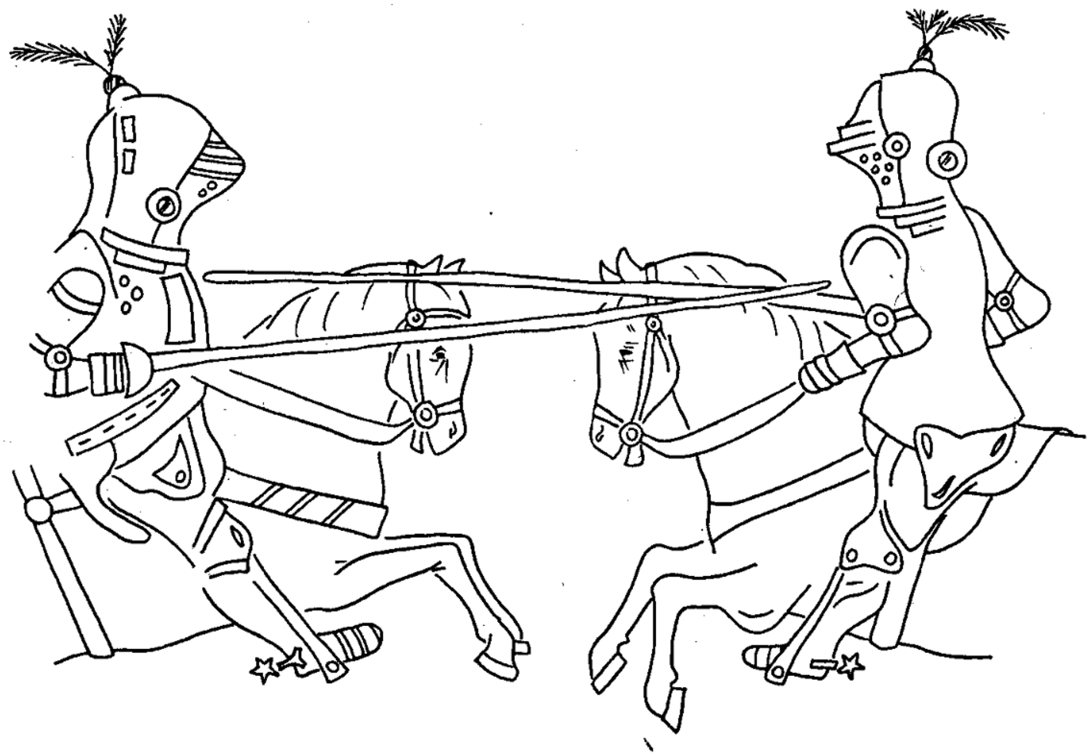
A tavaly szeptemberi számban kitűzött P. 306. probléma a következőképpen szólt:

„Artúr király testőrei lovagi tornát vívtak. A torna végén kiderült, hogy a király bármely n testőrhöz tud találni egy $(n+1)$-ediket, aki mindegyiküket legyőzte. Bizonyítsuk be, hogy legalább $2^{n+1}-1$ résztvevő volt.”



A feladatra 5 tanuló küldött helyes megoldást: *Erdélyi Tamás, Ligeti Rudolf, Lipusz Csaba, Nagy Gábor* és *Varga Lívia. Erdélyi Tamás* dolgozatának végén megjegyzi: „Érdekes kérdés, hogy egy $2^{n+1}-1$ főből álló társaságra megadható-e olyan konstrukció, amelyre a feladat feltételei teljesülnek.” Ennek az írásnak az a célja, hogy erről a kérdéskörről mindazt elmondja, amit ma a matematikusok tudnak.

Kezdjük egy definícióval. Jelölje $f(n)$ azt a legkisebb, n-nél nagyobb egész számot, amelyre igaz a következő állítás. Ha a királynak pontosan $f(n)$ testőre van, akkor a lovagi tornának lehetséges olyan végeredménye, hogy bármely n testőrhöz található olyan $(n+1)$-edik, aki mind az n-et legyőzte.

Könnyen belátható, hogy $f(1)=3$, az F. 2159. feladat megoldása (megjelent a Kömal 58. kötet, 1. szám 9. oldalán) szerint $f(2)=7$, továbbá a P. 306. probléma azt állítja, hogy $f(n)\geq 2^{n+1}-1$. Elsőként *Erdős Pál* bizonyította, hogy

$$2^{n+1}-1\leq f(n)\leq n^2\cdot 2^{n+1}, \tag{1}$$

1965-ben azután két ausztráliai matematikus, *E.* és *G. Szekeres* megmutatták, hogy a valamivel erősebb

$$(n+2)2^{n-1}-1\leq f(n) \tag{2}$$

egyenlőtlenség is igaz.

Elsőként (2)-t bizonyítjuk, ebből (1) első egyenlőtlensége már következik. Ehhez egy újabb definícióra van szükségünk.

Jelöljük $g(n,\,m)$-mel azt a legkisebb, n-nél nagyobb egész számot, amelyre igaz a következő állítás. Ha Artúr királynak pontosan $g(n,\,m)$ testőre van, akkor a lovagi tornának lehetséges olyan kimenetele, hogy bármely n testőrt legalább m másik testőr legyőzött. Világos, hogy $g(n,\,1)=f(n)$.

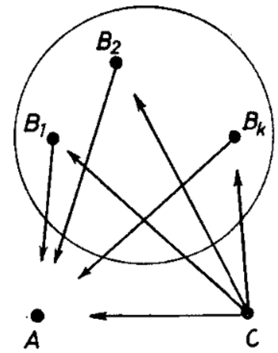
Legyen $k=g(n,\,m)$ és tegyük fel, hogy a k testőr közötti lovagi torna végeredménye megfelel a fenti feltételnek. Nem lehetséges, hogy minden testőr több mint $(k-1)/2$ testőrtől kapjon ki, mert ekkor a vereségek száma több volna, mint $k(k-1)/2$, noha összesen legfeljebb $k(k-1)/2$ mérkőzés volt. Legyen tehát A olyan testőr, aki legfeljebb $(k-1)/2$ alkalommal kapott ki. Ha most $n=1$, akkor a feltétel szerint A-t legalább m testőr győzte le, azaz $m\leq(k-1)/2$, ahonnan

$$g(1,\,m)\geq 2m+1. \tag{3}$$

Ha $n\neq 1$, akkor állítjuk, hogy az A-t legyőző testőrök száma legalább $g(n-1,\,m)$, azaz

$$g(n,\,m)\geq 2g(n-1,\,m)+1. \tag{4}$$

Ehhez elegendő megmutatnunk, hogy az A-t legyőző testőrök teljesítik a $g(n-1,\,m)$ definíciójában szereplő állítást.



1. ábra

Először is legalább n testőr győzte le A-t. Ugyanis ha csak a B_1, B_2, …, B_k ($k < n$) testőrök nyertek volna A ellen, akkor az A, B_1, …, B_k testőröket tetszőlegesen kiegészítve n testőrré, volna olyan C, aki mindnyájukat legyőzte, azaz legyőzte A-t is és legyőzte B_1, B_2, …, B_k-t is (1. ábra). Ez a C nem egyezhet meg egyik B_i-vel sem; és legyőzte A-t, ami ellentmond annak, hogy A-t csak B_1, B_2, …, B_k győzte le. Másodszor azt kell ellenőriznünk, hogy ha a B_1, B_2, …, B_{n-1} testőrök mind legyőzték A-t, akkor van m testőr a legyőzők között, akik B_1, B_2 …, B_{n-1} mindegyikét legyőzték. Ám ezt éppen az a feltételünk biztosítja, ami szerint az A, B_1, B_2, …, B_{n-1} (összesen n fő) testőrhöz található m olyan testőr, akik ezt az n-et legyőzték. Ezek persze legyőzték A-t, és legyőzték B_1 B_2, …, B_{n-1}-et is.

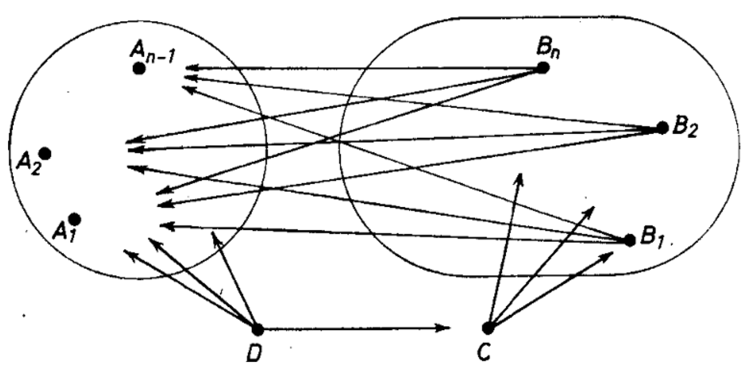
A (3) és (4) egyenlőtlenségek alapján teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy

$$g(n,\, m) \geq 2^n(m+1) - 1. \tag{5}$$

$n = 1$-re az állítás (3)-mal ekvivalens. Ha $n \geq 2$ és (5)-öt már $(n-1)$-re tudjuk, akkor (4) szerint

$$g(n,\, m) \geq 2g(n-1,\, m) + 1 \geq 2(2^{n-1}(m+1) - 1) + 1 = 2^n(m+1) - 1,$$

amivel a teljes indukciós bizonyításunk készen van.



2. ábra

Az (5) egyenlőtlenségben $m = 1$-et téve megkapjuk (1) első egyenlőtlenségét. Ahhoz, hogy (2)-t megkapjuk, még a következőket kell észrevennünk. Ha bármely n testőrhöz van olyan $(n+1)$-edik, aki mind az n-et legyőzte, akkor bármely $(n-1)$ testőrt legalább $(n+1)$ győzött le. Tegyük fel ugyanis, hogy az A_1, A_2, …, A_{n-1} testőröket csak a B_1, B_2, …, B_n testőrök győzték le. A feltétel szerint létezik olyan C testőr, aki a B_1, B_2, …, B_n mindegyikét legyőzte. Ez nem lehet azonos semelyik A_i-vel sem, hiszen A_i-t mindegyik B_j legyőzte. Kell lenni olyan D testőrnek is, aki az A_1, A_2, …, A_{n-1}, és C testőröket legyőzte (2. ábra). D nem lehet azonos egyetlen B_j-vel sem, mivel D legyőzte C-t, viszont mindegyik B_j kikapott C-től. Másreszt D-nek meg kell egyeznie valamelyik B_j-vel, hiszen A_1, A_2, …, A_{n-1} mindegyikét csak a B_1, …, B_n testőrök győzték le. Ellentmondásra jutottunk, ami állításunkat igazolja. Hasonlóan juthatunk ellentmondásra abból a feltevésből, hogy az A_i-ket n-nél kevesebb testőr győzte le.

Így tehát $f(n) \geq g(n-1,\, n+1)2^{n-1}(n+2) - 1$, ahogyan az (2)-ben szerepel.

Ahhoz, hogy az $f(n) \leq n^2 \cdot 2^{n+1} = k$ egyenlőtlenséget igazoljuk, semmi mást nem kell tennünk, mint a k testőr közötti $k(k-1)/2$ küzdelem eredményét úgy megválasztanunk, hogy bármely n testőrt valaki legyőzzön.

Sőt ezeket *nem kell konkrétan megadnunk,* elegendő bizonyítani, hogy a $k(k-1)/2$ küzdelem eredménye *megválasztható* úgy, hogy bármely n testőrt valaki legyőzzön.

A helyzet hasonló ahhoz, amikor azt akarjuk bizonyítani, hogy az $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ ($n \geq 2$) sorozat első 1001 tagja között van kettő olyan, melyek ugyanarra a számjegyre végződnek. Itt is elegendő megkeresnünk ezt a kettőt, de ehelyett igazolhatjuk azt is, hogy ilyen pár mindig *kiválasztható* anélkül, hogy tudnánk, mik is lesznek a párnak az elemei.

Esetünkben ez a következőképpen fog történni. Megbecsüljük annak a valószínűségét, hogy a lovagi torna végeredménye „jó” lesz. Ha ez a valószínűség pozitív, akkor készen vagyunk, a lehetetlen esemény valószínűsége ugyanis 0.

Tegyük fel tehát, hogy annak valószínűsége, hogy az i-edik testőr legyőzi a j-ediket, i-től és j-től függetlenül $1/2$. Tegyük fel továbbá, hogy a küzdelmek kimenetele egymástól független. Legyen p annak a valószínűsége, hogy tetszőleges n testőrhöz található olyan $(n+1)$-edik, aki mind az n-et legyőzte. Ha most a küzdelmek minden lehetséges kimenetele mellett található n testőr, akiket senki sem győzött le, akkor a fenti esemény a lehetetlen esemény, és így $p=0$. Így tehát megmutatjuk, hogy $p\neq 0$ vagy ami ugyanaz, hogy $1-p<1$, akkor a testőrök közötti küzdelmek eredménye *megválasztható úgy, hogy bármely n testőrhöz lehessen találni olyan $(n+1)$-ediket, aki mindegyiküket legyőzte.*

Legyenek $B_1, B_2, \ldots, B_n$ tetszőleges testőrök. Annak valószínűsége, hogy az A testőr mindegyik B_i-t legyőzi, $1/2^n$, hiszen mindet $1/2$ valószínűséggel győzi le, és a küzdelmek eredménye egymástól független. Így annak valószínűsége, hogy A *nem* győzi le mindet, $1-1/2^n$, és így annak valószínűsége, hogy a $B_1, B_2, \ldots, B_n$-től különböző $(k-n)$ testőr egyike sem győzi le $B_1, B_2, \ldots, B_n$ mindegyikét,

$$q=\left(1-\frac{1}{2^n}\right)^{k-n},$$

hiszen ezek még mindig független események. Így akárhogyan választunk ki n testőrt, q annak a valószínűsége, hogy senki sem győzi le mind az n-et.

A k testőr közül n testőrt $\binom{k}{n}$-féleképpen választhatunk ki. Így annak a valószínűsége, hogy van olyan n-es, akit senki sem győz le, legfeljebb $\binom{k}{n}\cdot q$, azaz

$$1-p\le\binom{k}{n}\cdot q.$$

Itt már nem feltétlenül áll fenn egyenlőség, ugyanis az összegzett események már nem zárják ki egymást. Mivel

$$\binom{k}{n}\le k^n \qquad \text{és} \qquad q<\left(1-\frac{1}{2^n}\right)^{k},$$

az $1-p<1$ egyenlőtlenség igazolásához elegendő megmutatni, hogy

$$k^n\left(1-\frac{1}{2^n}\right)^{k}<1,$$

ha $k=n^2\cdot 2^{n+1}$. Mindkét oldalból n-edik gyököt vonva és k értékét behelyettesítve, a bizonyítandó egyenlőtlenség

(6) $$n^2\cdot 2^{n+1}\left[\left(1-\frac{1}{2^n}\right)^{2^n}\right]^{2n}<1.$$

Ennek igazolásához szükségünk lesz a következő két egyenlőtlenségre:

(7) $$\left(1-\frac{1}{k}\right)^{k}<e^{-1} \qquad \text{és} \qquad k^2\cdot 2^{k+1}<e^{2k}.$$

Az $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=2{,}71\ldots$ Az első az ismert $\left(1+\dfrac{1}{k-1}\right)^{k}>e$ egyenlőtlenség reciproka, a másodikat k-ra vonatkozó teljes indukcióval könnyen igazolhatjuk.

(7) első egyenlőtlenségét $k=2^n$-re alkalmazva

$$n^2\cdot 2^{n+1}\left[\left(1-\frac{1}{2^n}\right)^{2^n}\right]^{2n}<n^2\cdot 2^{n+1}\cdot e^{-2n}\cdot e^{2n}\cdot e^{-2n}=1$$

(7) második egyenlőtlensége szerint. Ezzel (6)-t és ezzel (1) második egyenlőtlenségét is igazoltuk.

Az $f(n)$ függvény értékét tehát két korlát közé sikerült szorítanunk. Az alábbi táblázatban $n\le 6$-ra tüntettük fel a korlátok, illetve $f(n)$ értékét. Az, hogy $f(1)=3$, triviális, az $f(2)=7$ egyenlőséget az F. 2159. feladat megoldásában bizonyítottuk. $f(3)$ pontos értékét *E.* és *G. Szekeres* számították ki.

$\boldsymbol{n}$	1	2	3	4	5	6
$(n+2)^{2n-1}-1$	2	7	19	47	111	255
$f(n)$	3	7	19	?	?	?
$n^2\cdot 2^{n+1}$	4	32	144	512	1600	4608

Megadták 19 testőr közötti 171 küzdelem végeredményét úgy, hogy bármely három testőrhöz legyen egy negyedik, aki mindhármukat legyőzte: az i-edik testőr pontosan akkor győzze le a j-ediket, ha az $i+19-j$ kifejezés 19-cel osztva az 1, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 16 vagy 17 maradékot adja. Az olvasóra bízzuk annak ellenőrzését, hogy ez valóban jó.

Az $n=4$ értéktől fölfelé $f(n)$ értéke nem ismeretes, sőt még azt sem tudjuk, hogy az $\frac{f(n)}{n\cdot 2^n}$ sorozat korlátos-e. Megjegyezzük, hogy a konstrukcióból $f(4)$-re adódó legjobb felső korlát 311 (a legkisebb olyan k, amelyre $\binom{k}{4}q<1$ fennáll), ennél jobb felső korlátot nem ismerünk. Sőt, bár tudjuk, hogy 311 testőr közötti küzdelmek eredményét meg lehet választani úgy, hogy bármely négy testőrt valaki legyőzzön, eddig még senki nem adott meg ilyet. Még annak eldöntése is, hogy $f(4)$ egyenlő-e 47-tel, szinte reménytelennek látszik. A 47 testőr közötti 1081 mérkőzésnek $2^{1081}\approx 10^{300}$ különböző végeredménye lehet, és ha mindről átlag 0,1 másodperc alatt el tudjuk dönteni, hogy jó-e vagy sem (ami egyenként $\binom{47}{4}=178\,365$ vizsgálatot jelent), akkor az utolsó esetre is több mint 10^{290} év múlva kerülne sor. Csak győzzük kivárni!