$$(1)\qquad \frac{AA_1}{AA_2}+\frac{BB_1}{BB_2}+\frac{CC_1}{CC_2}\leqq\frac{9}{4}.$$

I. megoldás. Az A_2A_1C háromszög hasonló az A_2CA háromszöghöz, mert A_2-nél levő szögük közös, továbbá $A_1CA_2\sphericalangle=BCA_2\sphericalangle=BAA_2\sphericalangle=CAA_2\sphericalangle$. A megfelelő oldalak arányából

$$A_1A_2=A_2C\frac{A_1C}{CA},\quad A_2A=CA_2\frac{CA}{A_1C},$$

és így (1) első tagja a háromszög oldalainak szokásos jelölésével a szögfelező osztásaránya alapján:

$$\frac{AA_1}{AA_2}=\frac{AA_2-A_1A_2}{AA_2}=1-\left(\frac{A_1C}{CA}\right)^2=1-\left(\frac{\frac{ab}{b+c}}{b}\right)^2=1-\left(\frac{a}{b+c}\right)^2.$$

Mivel a B_1 és C_1, valamint a B_2 és C_2 pontokat ugyanúgy kapjuk, mint A_1-et, illetve A_2-t, azért az A, B, C, valamint a, b, c betűk ciklikus felcserélésével (1) további tagjait kifejezve, (1) helyett azt bizonyíthatjuk, hogy minden háromszögben

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^2+\left(\frac{b}{c+a}\right)^2+\left(\frac{c}{a+b}\right)^2\geq\frac{3}{4}.$$

A nyilvánvaló

$$(u+v)^2\leq 2u^2+2v^2$$

azonosságból

$$\frac{1}{(u+v)^2}\geq\frac{1}{2(u^2+v^2)},$$

ennek alapján elég ezt bizonyítanunk:

$$(2)\qquad \frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}\geq\frac{3}{2}.$$

Bevezetve az

$$x=b^2+c^2,\quad y=c^2+a^2,\quad z=a^2+b^2$$

jelöléseket, a számlálók, majd (2) így alakulnak:

$$2a^2=y+z-x,\quad 2b^2=z+x-y,\quad 2c^2=x+y-z,$$
$$\frac{y+z-x}{x}+\frac{x+z-y}{y}+\frac{x+y-z}{z}\geq 3,$$
$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)\geq 6,$$

ami nyilvánvaló az ismert

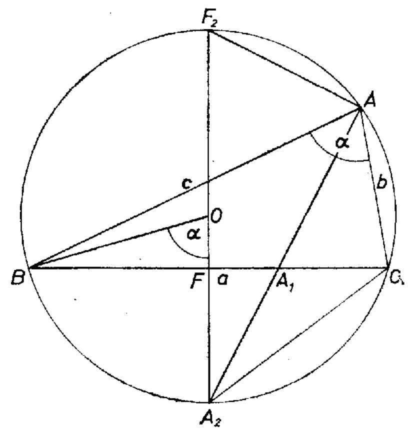
$$x+\frac{1}{x}\geq 2$$

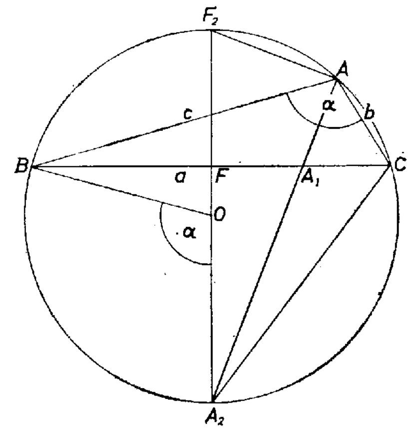
egyenlőtlenség alapján.

Könnyű belátni, hogy egyenlőség mindenütt akkor és csak akkor áll, ha $a=b=c$.

Bara Tamás (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., IV. o. t.)

II. megoldás. A szögfelezés, a BAA_2 és CAA_2 kerületi szögek egyenlősége alapján a száraik közti BA_2, CA_2 ívek valamint húrok is egyenlők, ezért A_2 rajta van a BC oldal felező merőlegesén. Jelöljük ennek a BC oldalon levő pontját F-fel, a körön levő másik pontját F_2-vel.





Így A_2F_2A és A_2A_1F derékszögű háromszögek – vagy pedig F_2 azonos A-val, F az A_1-gyel –, ezért $A_1A_2 \geq FA_2$ és $AA_2 \geq F_2A_2$, tehát

$$\frac{A_1A_2}{AA_2} \geq \frac{FA_2}{F_2A_2},$$

$$\frac{AA_1}{AA_2} = 1 - \frac{A_1A_2}{AA_2} \leq 1 - \frac{FA_2}{F_2A_2} = \frac{F_2F}{F_2A_2}. \tag{3}$$

Mármost $F_2F = F_2O \pm OF$, aszerint véve az előjelet, hogy a $BAC\sphericalangle = BOA_2\sphericalangle$ hegyesszög-e vagy tompaszög. Ez a vagylagosság ismét egységgé válik, ha OF-et az OB sugár vetületének tekintjük az O-tól A_2 felé irányított F_2A_2 átmérőre (a szögek szokásos jelölésével):

$$\frac{F_2F}{F_2A_2} = \frac{F_2O + OB\cos\alpha}{2F_2O} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\alpha,$$

tehát (1) első tagjára

$$\frac{AA_1}{AA_2} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\alpha. \tag{4}$$

Meggondolásunk a betűk kellő cseréjével (1) második és harmadik tagjára is érvényes, ezért (1) bizonyítására elegendő igazolni a belőle (4)-nek és megfelelőinek behelyettesítésével adódó

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \frac{3}{2} \tag{5}$$

egyenlőtlenséget.

Itt ismert goniometrikus azonosságok alapján az első két tag összegére

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \leq 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = 2\sin\frac{\gamma}{2}, \tag{6}$$

mert $(\alpha+\beta)/2 < 90°$; a harmadik tag $1 - 2\sin^2\gamma/2$, ezekkel pedig (5) jobb és bal oldalának különbsége nem kisebb, mint

$$\frac{1}{2} + 2\sin^2\frac{\gamma}{2} - 2\sin\frac{\gamma}{2} = 2\left(\sin\frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0. \tag{7}$$

Ezzel (5)-öt – ami különben elég gyakran előforduló egyenlőtlenség a háromszög szögeire – és vele a feladat állítását is bebizonyítottuk.

(3)-ban, (4)-ben és (6)-ban – mint említettük – egyenlőség áll, ha $AB = AC$; ezért ha még $BC = AB$ is fennáll, vagyis ha az ABC háromszög egyenlő oldalú akkor (5) és (7) két oldala is egyenlő. Ebben az esetben, de csakis ekkor, egyenlőség áll (1)-ben is. Valóban, szabályos háromszög esetében (1) bal oldalának mindhárom tagja 3/4.

Megjegyzés. Meg lehet mutatni, hogy $AA_1 = f_a$ jelöléssel

$$\frac{AA_1}{AA_2} = \frac{f_a^2}{bc},$$

ezzel (1) így alakul:

$$\frac{f_a^2}{bc} + \frac{f_b^2}{ca} + \frac{f_c^2}{ab} \leq \frac{9}{4}.$$

Az 1799. feladatban[1] viszont ezt bizonyítottuk:

$$\frac{s_a^2}{bc}+\frac{s_b^2}{ca}+\frac{s_c^2}{ab}\geq\frac{9}{4},$$

ahol a számlálókban a súlyvonalak hossza áll. Végül a magasságokra

$$m_a\leq f_a(\leq s_a),$$

tehát ezekre méginkább

$$\frac{m_a^2}{bc}+\frac{m_b^2}{ca}+\frac{m_c^2}{ab}\leq\frac{9}{4}.$$

[1]Lásd K.M. L. (1973) 118. old.