1. A tökéletes számokról *Erdős–Surányi:* Válogatott fejezetek a számelméletből című könyvének (Tankönyvkiadó, 1960) 202. oldalán ez áll:

„A régi népeknél gyakran találkozunk azzal, hogy egyes számoknak mágikus erőt tulajdonítanak. Egy–két szerencsés és szerencsétlen számot ma is számon tartanak a babonák közt. A pythagorasi iskola meg éppen tudományos programul tűzte ki, hogy mindent a számokból magyarázzon meg. Egy szám valódi osztóit a szám részeinek tekintették, így is nevezték; így érthető, hogy különleges jelentőséget tulajdonítottak azoknak a számoknak, melyek részeikből újra visszanyerhetők, azaz amelyek megegyeznek részeik (valódi osztóik) összegével. Ezeket a harmónia kifejezőjének tekintették (hasonlóan, mint a szabályos testeket a geometriában). Ezt az elnevezésük: *tökéletes szám*, is mutatja.

Euklidesz-nél olvashatjuk, de valószínűleg már korábban is ismert volt, hogy a $2^{n-1}(2^n-1)$ alakú számok tökéletes számok, ha (2^n-1) prímszám. 2000 évvel később *Euler*-nek sikerült megmutatnia, hogy a páros számok közül csak az ilyen alakúak tökéletes számok. Hogy vannak-e páratlan tökéletes számok vagy sem, azt mind ez ideig nem sikerült eldönteni."

2. Ha szokás szerint $\sigma(n)$-nel jelöljük n pozitív osztónak összegét, a tökéletesség feltételéül a

$$\sigma(n) = 2n$$

egyenletet kapjuk, hiszen $\sigma(n)$-ben n osztói között maga n is szerepel. Például a $2^2(2^3-1) = 28$ szám tökéletes, mert

$$\sigma(28) = 1+2+4+7+14+28 = 2\cdot 28.$$

Suryanarayana (India) az *Elemente der Mathematik* című folyóirat 1969. évi 1. számában a

$$\sigma\big(\sigma(n)\big) = 2n$$

egyenletnek eleget tevő számokat *nagyon tökéletes számok*nak nevezte el, és megkérdezte, melyek a nagyon tökéletes számok. Például az $n = 16$ szám nagyon tökéletes, hiszen

$$\sigma(16) = 1+2+4+8+16 = 31$$

és

$$\sigma\big(\sigma(16)\big) = \sigma(31) = 1+31 = 2\cdot 16.$$

Könnyen látható, hogy általában ha 2^k-1 prímszám, akkor $n = 2^{k-1}$ nagyon tökéletes, hiszen

$$\sigma(2^{k-1}) = 1+2+\ldots+2^{k-1} = 2^k-1,$$
$$\text{és}\quad \sigma(2^k-1) = 1+(2^k-1) = 2^k.$$

3. Ennél azonban sokkal több is igaz: *egy páros szám csak akkor lehet nagyon tökéletes,* ha 2^{k-1} *alakú olyan k kitevő mellett, melyre* 2^k-1 *prímszám.* (Tehát a páros számok körében minden nagyon tökéletes szám mögött egy tökéletes szám áll.)

Először belátjuk, hogy nagyon tökéletes páros számnak nem lehet páratlan osztója.

Legyen ugyanis n páros és nagyon tökéletes, vagyis legyen $n = 2^{k-1}q$, ahol $k \geq 2$ és q páratlan. Ha q osztói az $1 = q_1 < q_2 < \ldots < q_m = q$ számok, akkor n osztói a következő csoportok valamelyikébe tartoznak:

q	osztói:	$q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_m$,	ezek összege $\sigma(q)$;
$2q$	még nem említett osztói	$2q_1,\ 2q_2,\ \ldots,\ 2q_m$,	ezek összege $2\sigma(q)$;
$4q$	még nem említett osztói	$4q_1,\ 4q_2,\ \ldots,\ 4q_m$	ezek összege $4\sigma(q)$;
	...	...	
$2^{k-1}q$	még nem említett osztói	$2^{k-1}q_1,\ 2^{k-1}q_2,\ \ldots,\ 2^{k-1}q_m$	ezek összege $2^{k-1}\sigma(q)$.

Tehát $\sigma(n) = \sigma(2^{k-1})\sigma(q) = (2^k-1)\,\sigma(q)$. Ha $q > 1$, akkor az $N = (2^k-1)\,\sigma(q)$ számnak az 1, $\sigma(q)$, N számok különböző pozitív osztói, emiatt $\sigma\big(\sigma(n)\big) = \sigma(N) \geq 1+\sigma(q)+N = 1+2^k\sigma(q) > 1+2^kq > 2n$, hiszen ha $q > 1$, akkor $\sigma(q) \geq 1+q > q$. Ezzel beláttuk, hogy ha $q > 1$, akkor n nem lehet nagyon tökéletes, vagyis nagyon tökéletes páros számnak nem lehet páratlan valódi osztója.

Tehát a páros „nagyon tökéletes számok" csak kettő hatványai lehetnek. Ha $n = 2^{k-1}$, ekkor $\sigma(2^{k-1}) = 1+2+\ldots+2^{k-1} = 2^k-1$. Ezek közül azonban csak azok lesznek valóban „nagyon tökéletesek", amelyekre $\sigma\big(\sigma(2^{k-1})\big) = \sigma(2^k-1) = 2\cdot 2^{k-1} = 2^k$. Ez akkor és csak akkor teljesül, ha 2^k-1 prímszám. Ezt akartuk bizonyítani.

4. *H. J. Kanold* (NSZK) az *Elemente der Mathematik* 1969. évi 3. számában bebizonyította, hogy a *páratlan nagyon tökéletes számok csak négyzetszámok lehetnek.*

Legyen n törzstényezős felbontása $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, ahol $p_1 < p_2 < \dots < p_k$. Ekkor ismert, hogy n osztóinak összege

$$\sigma(n) = (1 + p_1 + \dots + p_1^{\alpha_1}) \cdot \dots \cdot (1 + p_k + \dots + p_k^{\alpha_k}). \tag{1}$$

Legyen $\sigma(n)$ törzstényezős felbontása: $\sigma(n) = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_l^{\beta_l}$, ahol $q_1 < q_2 < \dots < q_l$. Így tehát $\sigma\big(\sigma(n)\big) = (1 + q_1 + \dots + q_1^{\beta_1}) \cdot \dots \cdot (1 + q_l + \dots + q_l^{\beta_l}) = 2(p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k})$.

Ha n páratlan és nem négyzetszám, akkor minden p_i is páratlan és az $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ kitevők között is lesz páratlan egész; ezért valamelyik i-re $(1 + p_i + \dots + p_i^{\alpha_i})$ páros sok páratlan szám összege. Emiatt $\sigma(n)$ páros lesz, legkisebb prímosztója a 2, azaz

$$q_1 = 2. \tag{2}$$

Mivel p_1 a $\sigma\big(\sigma(n)\big)$ felbontásában is szerepel prímtényezőként, ezért

$$p_1 \le 1 + 2 + \dots + 2^{\beta_1} = 2^{\beta_1 + 1} - 1.$$

A nagyon tökéletes számok definíciója szerint $\sigma\big(\sigma(n)\big) = 2n$, ezért

$$\begin{aligned}2 = \frac{\sigma\big(\sigma(n)\big)}{n} = \frac{\sigma\big(\sigma(n)\big)}{\sigma n} \cdot \frac{\sigma(n)}{n} &= \left(\frac{1 + q_1 + \dots + q_1^{\beta_1}}{q_1^{\beta_1}} \cdot \dots \cdot \frac{1 + q_l + \dots + q_l^{\beta_l}}{q_l^{\beta_l}}\right) \\ &\left(\frac{1 + p_1 + \dots + p_1^{\alpha_1}}{p_1^{\alpha_1}} \cdot \dots \cdot \frac{1 + p_k + \dots + p_k^{\alpha_k}}{p_k^{\alpha_k}}\right) \ge \\ &\ge \left(1 + \frac{1}{q_1} + \dots + \frac{1}{q_1^{\beta_1}}\right)\left(1 + \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_1^{\alpha_1}}\right) \ge \\ &\ge \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{\beta_1}}\right)\left(1 + \frac{1}{p_1}\right) \ge \\ &\ge \frac{2^{\beta_1+1} - 1}{2^{\beta_1}}\left(1 + \frac{1}{2^{\beta_1+1} - 1}\right) = \frac{2^{\beta_1+1} - 1}{2^{\beta_1}} \cdot \frac{2^{\beta_1+1}}{2^{\beta_1+1} - 1} = 2.\end{aligned}$$

(Az egyenlőtlenségek teljesülnek, hiszen 1-nél nagyobb tényezőket hagytunk el, és bebizonyítottuk, hogy $p_1 \le 2^{\beta_1+1} - 1$.) A kapott egyenlőség csak akkor lehetséges, ha $k = l = 1$, $\alpha_1 = 1$, $p_1 = 2^{\beta_1+1} - 1$. Így n-re, ha az páratlan és nem négyzetszám, teljesül $n = p_1$, $\sigma(n) = 1 + p_1 = 2^{\beta_1+1}$, $\sigma\big(\sigma(n)\big) = 2^{\beta_1+1} - 1$.

Másrészt a definíció szerint $\sigma\big(\sigma(n)\big) = 2n = 2p_1$. A nyilvánvaló ellentmondás (páros szám egyenlő egy páratlannal) mutatja, hogy a „nagyon tökéletes" páratlan szám csak négyzetszám lehet.

5. *Végül megmutatjuk, hogy páratlan prímszám négyzete nem lehet nagyon tökéletes szám.*

Ha ugyanis $n = p^2$ (p páratlan prím), akkor $\sigma(n) = 1 + p + p^2$, n tehát akkor lenne „nagyon tökéletes szám", ha $\sigma\big(\sigma((n)\big) = \sigma(1 + p + p^2) = 2p^2$ teljesülne. Bontsuk $\sigma(n)$-t törzstényezők szorzatára, legyen $1 + p + p^2 = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$. (Mivel $p(p+1) + 1$ páratlan szám, a törzstényezős felbontásban csak páratlan prímek szerepelhetnek.) $\sigma(n)$ osztóinak összege:

$$\begin{aligned}\sigma\big(\sigma(n)\big) &= (1 + p_1 + \dots + p_1^{\alpha_1})(1 + p_2 + \dots + p_2^{\alpha_2}) \dots (1 + p_k + \dots + p_k^{\alpha_k}) = \\ &= \underbrace{\frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1}}_{\substack{\text{egész} \\ > 2}} \cdot \underbrace{\frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1}}_{\substack{\text{egész} \\ > 2}} \dots \underbrace{\frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}}_{\substack{\text{egész} \\ > 2}} = 2p^2.\end{aligned}$$

$2p^2$-t nem lehet kettőnél több olyan tényező szorzatára bontani, amelyek mindegyike nagyobb 2-nél, ebből következően $k \le 2$.

I. eset, ha $k = 1$.

Ekkor $\sigma(n) = 1 + p + p^2 = p_1^{\alpha_1}$.

Innen

$$p_1^{\alpha_1+1} = p_1(1 + p + p^2) \tag{1}$$

és

$$\sigma\big(\sigma(n)\big) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} = 2p^2,$$

így helyettesítve (1)-et és átrendezve $p_1(1 + p + p^2) - 1 = 2p^2(p_1 - 1)$, ahonnan

$$p_1 - 1 = p(p \cdot p_1 - 2p - p_1).$$

A jobb oldal osztható p-vel, tehát p_1 p-vel osztva 1-et ad maradékul. Mivel $p_1 > 2$, ebből adódik, hogy $p_1 \geq p+1$. Így azonban a $p_1^2 \geq (p+1)^2 > p^2+p+1 = p_1^{\alpha_1}$ egyenlőtlenség miatt $\alpha_1 = 1$.

Ekkor $\sigma(n) = p^2+p+1 = p_1$, $\sigma\big(\sigma(n)\big) = \sigma(p_1) = 1+p_1$.

Tehát ha n nagyon tökéletes, $1+p_1 = 2p^2$, az előbbiek szerint pedig

$$p^2+p+2 = 2p^2.$$

Ennek az egyenletnek a gyökei $p=-1$ és $p=2$, ami ellentmond annak a feltételünknek, hogy p páratlan prím.

II. eset, ha $k=2$.

Ekkor $\sigma(n) = p^2+p+1 = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$, osztóinak összege

$$\sigma\big(\sigma(n)\big) = (1+p_1+\ldots+p_1^{\alpha_1})(1+p_2+\ldots+p_2^{\alpha_2}) =$$
$$= \underbrace{\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}}_{\substack{\text{egész}\\ >2}}\underbrace{\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}}_{\substack{\text{egész}\\ >2}} = 2p^2.$$

Két 2-nél nagyobb egész szám szorzata csak akkor lehet $2p^2$ (p páratlan prím), ha az egyik p-vel, a másik $2p$-vel egyenlő. Legyen például

$$\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} = p, \quad \frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1} = 2p,$$

vagyis

$$p_1^{\alpha_1+1}-1 = p(p_1-1) \text{ és } p_2^{\alpha_2+1}-1 = 2p(p_2-1).$$

Ezekből következik, hogy p-vel osztva $p_1^{\alpha_1+1}$ és $p_2^{\alpha_2+1}$ is 1-et ad maradékul.

A két utóbbi egyenlőség szorzata:

$$p_1^{\alpha_1+1}p_2^{\alpha_2+1} - p_1^{\alpha_1+1} - p_2^{\alpha_2+1} + 1 = 2p^2(p_1-1)(p_2-1).$$

Mivel $\sigma(n) = p^2+p+1 = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$, ebből azt kapjuk, hogy

$$p_1p_2(p^2+p+1) = 2p^2(p_1-1)(p_2-1) + p_1^{\alpha_1+1} + p_2^{\alpha_2+1} - 1.$$

Mindkét oldalból 1-et elvéve:

$$p_1p_2p(p+1) + p_1p_2 - 1 = 2p^2(p_1-1)(p_2-1) +$$
$$+ (p_1^{\alpha_1+1}-1) + (p_2^{\alpha_2+1}-1) = 2p^2(p_1-1)(p_2-1) + p(p_1-1) + 2p(p_2-1).$$

Így világosan látszik, hogy p osztója (p_1p_2-1)-nek, tehát $p_1p_2 \geq p+1$. Ekkor $p_1^2p_2^2 \geq (p+1)^2 > p^2+p+1 = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$ folytán α_1 és α_2 közül legalább az egyik 1.

Ha $\alpha_1 = 1$, $n = 2p^2$, akkor $\sigma(n) = p^2+p+1 = p_1p_2^{\alpha_2}$,

$$\frac{p_1^2-1}{p_1-1} = p \quad \text{és} \quad \frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1} = 2p.$$

Ebből $p_1+1 = p$ következik, ami viszont ellentmond annak a kiinduló feltételünknek, hogy p és p_1 páratlan prímek.

Ha $\alpha_2 = 1$, $n = 2p^2$, akkor $\sigma(n) = p^2+p+1 = p_1^{\alpha_1}p_2$,

$$\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} = p \quad \text{és} \quad \frac{p_2^2-1}{p_2-1} = 2p,$$

tehát $p_2+1 = 2p$, azaz $p_2 = 2p-1$. Így $\sigma(n) = p^2+p+1 = p_1^{\alpha_1}(2p-1)$, vagyis

$$4\sigma(n) = (2p-1)(2p+3) + 7 = 4p_1^{\alpha_1}(2p-1).$$

Emiatt 7 osztható $(2p-1)$-gyel, p tehát osztója 4-nek. Kiinduló feltételünk szerint azonban p pozitív, páratlan prím, így nem lehet 4-nek osztója. Ezzel beláttuk, hogy páratlan prímszámok négyzete nem lehet nagyon tökéletes szám.

6. A fentiekhez hasonló úton Suryanarayana (Elemente der Mathematik, 1973. 6.) még azt is bizonyította, hogy a *páratlan nagyon tökéletes számok nem lehetnek egy prímszámnak páros hatványai sem.* Annak ellenére, hogy sok ilyen részleteredmény ismert, még eldöntetlen kérdés, hogy vannak-e egyáltalán páratlan nagyon tökéletes számok.