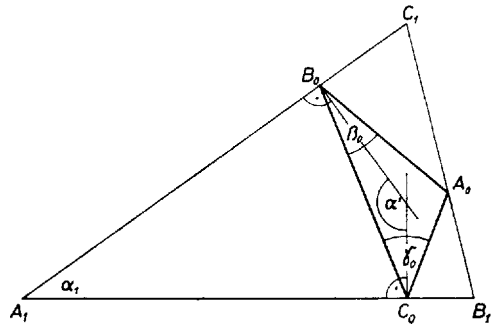
Rajzoljuk meg az $A_0B_0C_0$ háromszög külső szögfelezőivel határolt $A_1B_1C_1$ háromszöget, ahol az $A_1,\ B_1$ és C_1 csúcs az $A_0,\ B_0$, illetve C_0 csúccsal szemben fekszik.



Fejezzük ki az $A_1B_1C_1$ háromszög $\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1$ szögeit az eredeti háromszög $\alpha_0,\ \beta_0,\ \gamma_0$ szögeivel.

Felhasználva, hogy a külső szögfelezők merőlegesek a megfelelő belsőkre, és hogy $\alpha' = \pi - \dfrac{\gamma_0+\beta_0}{2}$, adódik

$$\alpha_1 = \frac{\gamma_0+\beta_0}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha_0}{2}, \quad \text{és hasonlóan} \quad \beta_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta_0}{2}, \quad \gamma_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma_0}{2}.$$

Ugyanezt alkalmazhatjuk a $H_k,\ H_{k+1}$ háromszögekre is, vagyis a megfelelő szögekre az

$$\alpha_{k+1} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha_k}{2}, \quad \beta_{k+1} = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta_k}{2}, \quad \gamma_{k+1} = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma_k}{2}$$

rekurziós képletek adódnak. Ezekből megfordítva

$$\alpha_{k+1} - \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \alpha_k\right), \quad \beta_{k+1} - \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \beta_k\right), \quad \gamma_{k+1} - \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \gamma_k\right).$$

Ennek ismételt alkalmazásával

$$\alpha_k - \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2^k}\left(\frac{\pi}{3} - \alpha_0\right), \text{ tehát } k \to \infty \text{ estén } \alpha_k \ \to \frac{\pi}{3},$$

és hasonlóan $\beta_k \to \dfrac{\pi}{3}, \quad \gamma_k \to \dfrac{\pi}{3}$.

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy a fenti bizonyítással a következő érdekes és általánosabb megfogalmazású állítást láttuk be: a tetszőleges $a_0,\ b_0,\ c_0$ valós számokból kiindulva az

$$a_{k+1} = \frac{1}{2}\ (b_k + c_k), \quad b_{k+1} = \frac{1}{2}\ (a_k + c_k), \quad c_{k+1} = \frac{1}{2}\ (a_k + b_k)$$

rekurziós képletekkel adódó $\{a_k\},\ \{b_k\}$ és $\{c_k\}$ sorozatok közös határértékhez mégpedig az

$$\frac{1}{3}\ (a_0 + b_0 + c_0)$$

számtani középhez tartanak.