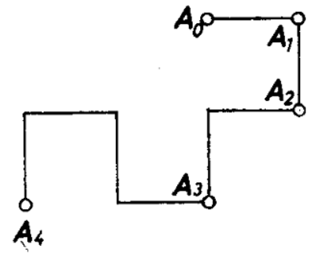
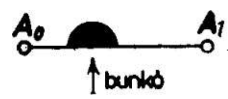
Előző számunk hátsó borítóján egy sárkánygörbét láthattunk. A görbe a következőképpen készült. Kiindultunk az A_0A_1 szakaszból (1. ábra), ezt A_1 körül pozitív irányban 90°-kal elforgattuk, kaptuk $A_0A_1A_2$ töröttvonalat. Ezt A_2 körül pozitív irányban 90°-kal elforgattuk, kaptuk az $A_0A_1A_2A_3$ töröttvonalat stb. Végül az így kapott kacskaringós vonalat A_0 körül még háromszor 90°-kal megforgattuk. (Előbb a sarkokat legömbölyítettük: ne legyen a sárkány olyan szúrós.) Két dolgot kellett bizonyítanunk: 1. a görbe sohasem metszi saját magát, 2. a görbe „kitölti” az egész síkot. Nézzük meg pontosan, mit is jelentenek ezek az állítások.



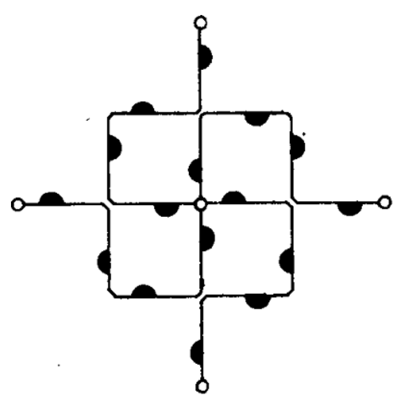
1. ábra

A sárkánygörbét négyzethálós papírra érdemes rajzolnunk. Ha A_0A_1 éppen egy kis négyzet oldala, akkor a töröttvonal minden oldala egy-egy négyzetoldal lesz. Az, hogy a görbe nem metszi saját magát, azt jelenti, hogy minden négyzetoldalon legfeljebb egyszer halad át (az A_0-ból induló másik három ággal együtt), bár egy-egy rácspontba kétszer is befuthat. A síkot a görbe „kitölti”, ha bármely négyzetoldalon legalább egyszer végigmegy, feltéve, hogy görbénkből már elég sokat megrajzoltunk. Ezeket az állításokat fogjuk igazolni.

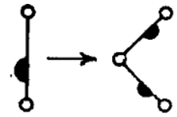


2. ábra

Először is módosítsuk a sárkánygörbét egy picit: ne egy közönséges szakaszból induljunk bunkó ki, hanem egy „bunkós” szakaszból, amilyen a 2. ábrán látható. Legyen az előírás szerint elkészített töröttvonal $A_0A_1A_2\dots A_i$, ahol A_i a töröttvonal utolsó pontja. Ezt A_0 körül még háromszor 90°-kal elforgatjuk, kapjuk az S_i görbét. A 3. ábrán S_3 látható.



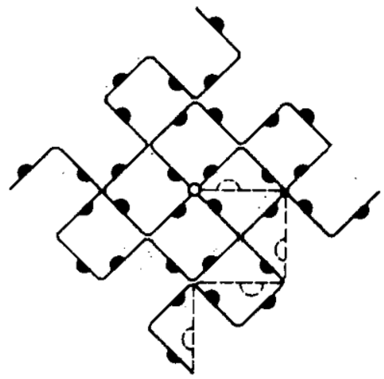
3. ábra



4. ábra

Elegendő állításainkat ezekre a bunkós sárkánygörbékre igazolni, hiszen a bunkókat lehagyva megkapjuk a közönséges (más néven mezei) sárkánygörbéket. A továbbiakban alapvető fontosságú a következő:

Ha S_i-ben minden egyes bunkós szakaszt a 4. ábrán látható két kisebb, egymáshoz derékszögben csatlakozó bunkós szakaszra cserélünk le (az irányítás megtartása mellett!), továbbá a kapott alakzatot 45°-kal elforgatjuk és $\sqrt{2}$-szeresére nyújtjuk, éppen S_{i+1}-et kapjuk.



5. ábra

Az 5. ábrán látható, mit kapunk S_3-ból a szakaszok lecserélése után, a szaggatott vonal S_3 egy ágát mutatja. Az állítás igazsága azonnal következik a sárkánygörbe definíciójából, ennek ellenére azt kérjük az olvasótól, hogy amíg ez nem teljesen világos előtte, ne menjen tovább.

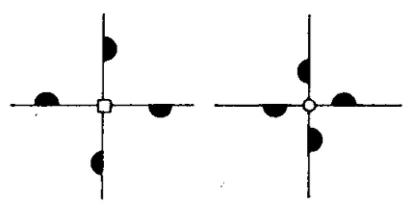
Minden S_i görbére igaz a következő három állítás:

(1) a görbe semelyik szakaszon sem halad át kétszer (vagy annál többször);

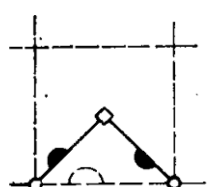
(2) minden rácspontba a bunkós szakaszok vagy mind a „fejükkel” (◯- csúcsok) vagy mind a „talpukkal” (□-csúcsok) futnak be (lásd a 6. ábrát), egy csúcsba természetesen négynél kevesebb szakasz is befuthat;

(3) az ◯-csúcsok és a □-csúcsok a rácspontokon felváltva, sakktáblaszerűen helyezkednek el.

Az (1) állítás mondja ki, hogy a sárkánygörbe sohasem metszi magát, a (2) és (3) állítások ennek bizonyításához szükségesek. Teljes indukciót alkalmazunk: az S_1, S_2, S_3 görbékre (1), (2) és (3) is teljesül. Tegyük fel, hogy S_i-re igazak. Mivel (1), (2), (3)-ban nem szerepel sem a görbe mérete, sem elhelyezkedése, elegendő ezeket S_{i+1} helyett arra az alakzatra igazolnunk, melyet S_i-ből a bunkós szakaszok lecserélésével kapunk. Jelöljük ezt T_i-vel.

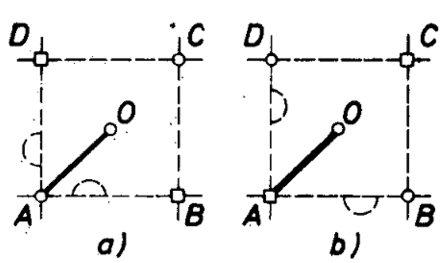


6. ábra

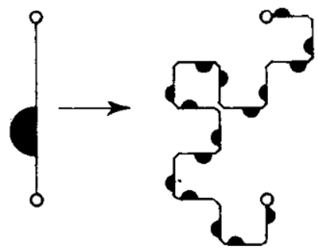


7. ábra

A T_i-nek megfelelő rácspontok egyrészt S_i rácspontjai, másrészt az alapnégyzetek középpontjai. Lecseréléskor a négyzetek középpontjaiba a kis bunkós szakaszok talpa, a négyzetek csúcsaiba azok feje mutat. Így (2) és (3) T_i-re biztosan teljesül (7. ábra). (1) igazolásához tegyük fel, hogy OA a T_i görbe egy szakasza, ahol O az $ABCD$ alapnégyzet középpontja (8. ábra). Azt kell megmutatnunk, hogy OA-t nem kaphattuk meg kétszer is, két különböző S_i-beli szakasz lecserélésekor. Az OA szakaszt csak az AB vagy az AD lecseréléséhez kaphattuk, azaz vagy AB vagy AD S_i-hez tartozik (lehet, hogy mindkettő). Különböztessünk meg két esetet: a) A ◯-csúcs; b) A □-csúcs. Tudjuk, hogy S_i-re igaz (3), ezért a B, C és D csúcsoknak (S_i-ben) olyanoknak kell lenniük, mint ahogyan az ábrán jelöltük. S mivel S_i-re igaz (2) is, azért az AB-n, illetve AD-n a bunkó (feltéve, hogy AB, ill. AD az S_i-hez tartozik) csak a jelölt helyen állhat. Az a) esetben OA-t kizárólag AB, a b) esetben kizárólag AD lecserélésével kaphatjuk meg. Evvel (1)-et is bizonyítottuk.

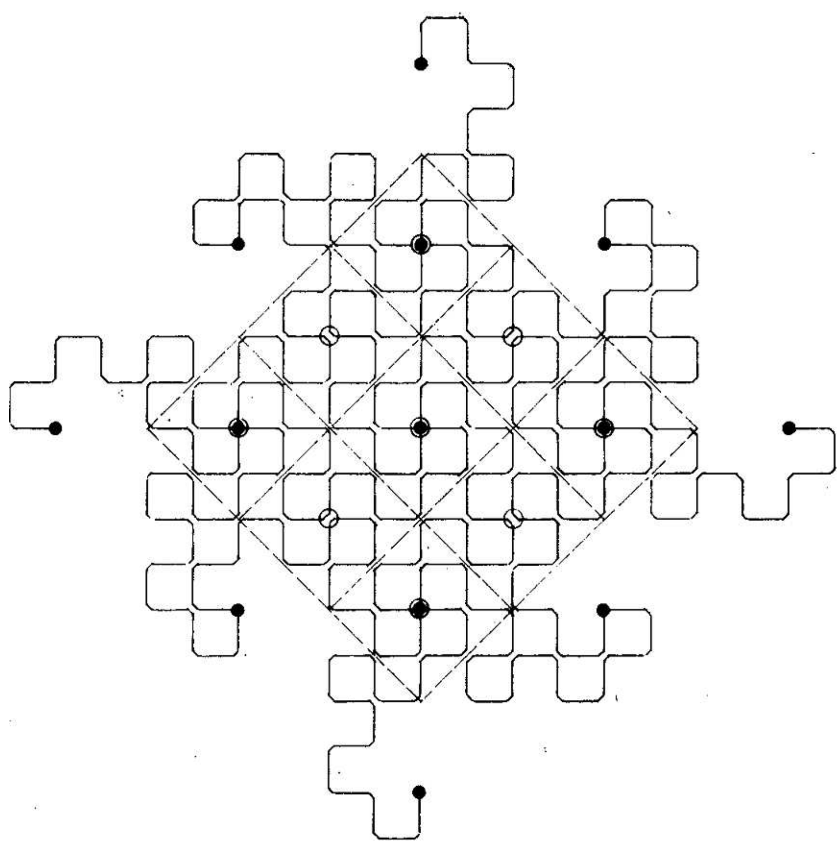


8. ábra

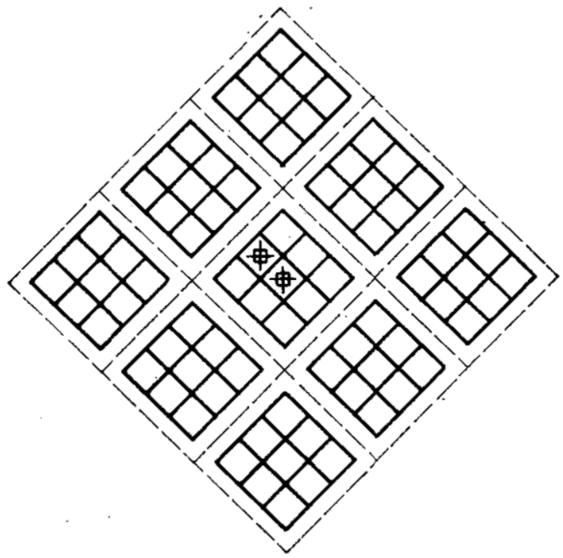


9. ábra

Összefoglalva: igazoltuk, hogy *a sárkánygörbe sohasem metszi saját magát.* Hátra van még az, hogy a görbe kitölti a síkot. Ehhez megjegyezzük, hogy ha ugyanabból a szakaszból kiindulva elkészítjük S_i-t és S_{i+1}-et, akkor S_i része S_{i+1}-nek: ha a sárkánygörbe valamit elfoglalt, azt már soha el nem engedi. Így azt kell bizonyítani, hogy ha A_0A_1 éppen egy kis négyzet oldala, akkor bármely négyzetoldal valamelyik S_i-ben (és akkor az összes későbbiben is) benne lesz. Ezt az előzőhöz hasonlóan tesszük. Figyeljük meg, hogy ha S_i-ben minden bunkós szakaszt a 9. ábrán látható vonallal helyettesítünk, majd a kapott alakzatot négyszeresére nyújtjuk, S_{i+4}-et kapjuk. Így például a 10. ábrán $S_{3+4} = S_7$ látható (bunkók nélkül).



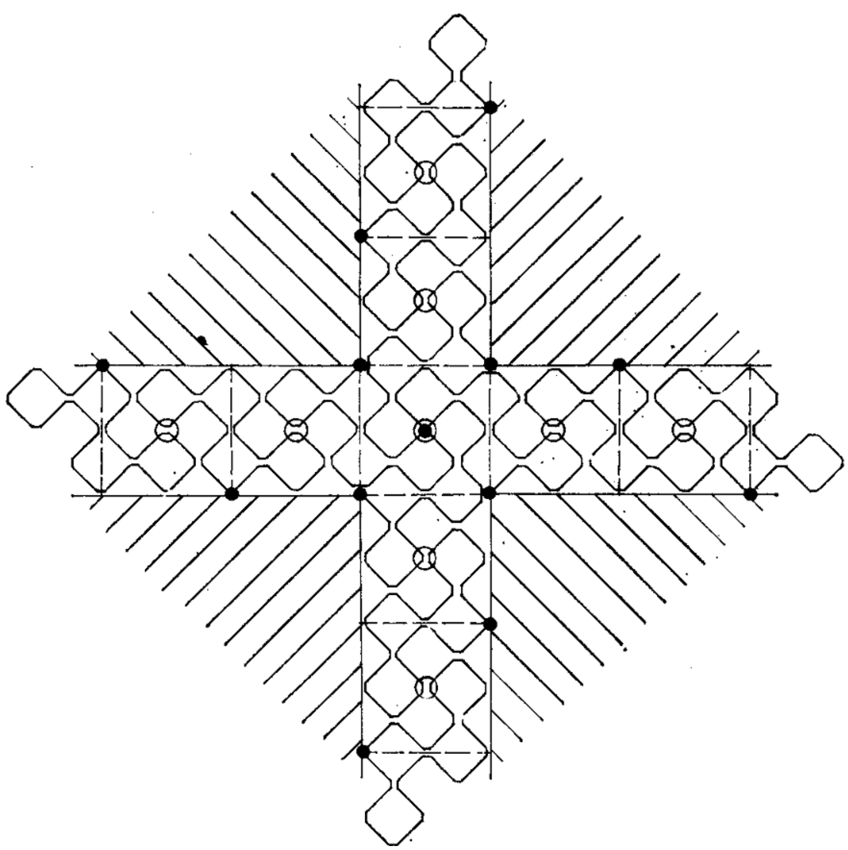
10. ábra



11. ábra

S_7-ben kilenc, S_3-mal egybevágó részsárkány is van (szaggatott vonallal elkerítve). Ezek mindegyikéből $S_{7+4} = S_{11}$-ben egy-egy S_7 sárkány lesz, és azokban újból 9-9 S_3 részsárkány, összesen 81 (11. ábra). S ha most olyan szerencsénk van, hogy az S_7 részsárkányok kilógó „fejei" éppen kitöltik a köztes részt, azaz ott újabb S_3 részsárkányok keletkeznek, akkor készen is vagyunk: S_7-ben 3×3 szomszédos S_3 van, S_{11}-ben pedig már 11×11. S_{15}-ben ezek mindegyikéből kilenc S_3 keletkezik, de a közöttük levő részek is kitöltődnek (ugyanúgy, mint S_{11} esetében), azaz itt már egy oldalon $3 \cdot 11 + 10 = 43$ szomszédos S_3 található. Általában S_{4k-1}-ben található szomszédos S_3 részsárkányok száma $\left(\dfrac{2^{2k-1}+1}{3}\right)^2$, ami például azt is jelenti, hogy az A_0 körüli $A_0A_1 \cdot \dfrac{2^{2k-1}+1}{3}$ sugarú körbe eső minden alapnégyzet oldala az S_{4k-1} görbéhez tartozik.

A bizonyítás befejezéséhez már csak szerencsénket kell ellenőriznünk. A 12. ábrán négy, sarkosan álló S_7 sárkány fejeit rajzoltuk le. Ezek jól láthatóan minden helyet elfoglalnak.



12. ábra