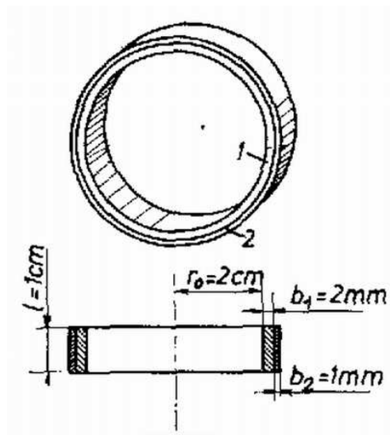
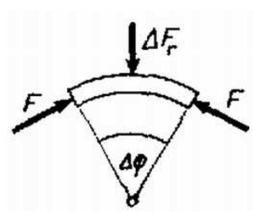
1. *A két acél hengergyűrűt (1. ábra) úgy tolták egymásba, hogy a nagyobb gyűrű hőmérséklete* 520°C, *a kisebbé* 20°C *volt. Ekkor a 2. gyűrű belső sugara* $9\cdot 10^{-3}$cm-*rel nagyobb volt, mint az 1. gyűrű külső sugara. Legalább mekkora tengelyirányú erő szükséges a gyűrűk szétválasztásához, amikor mindkét gyűrű* 20°C *hőmérsékletű, ha a tapadási súrlódási együttható* $\mu_0 = 0{,}16$*? (Az acél lineáris hőtágulási együtthatója* $\alpha = 1{,}2\cdot 10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}$*, Young modulusza* $E = 2\cdot 10^{11}\ \mathrm{Nm}^{-2}$*.)*



1. ábra

Megoldás. Lehűléskor a külső gyűrű összehúzódik. Ha a belső gyűrű nem lenne jelen, belső sugara $r_0\alpha\Delta t = 12\cdot 10^{-3}$ cm-rel csökkenne, ami $\delta = 3\cdot 10^{-3}$ cm-rel nagyobb a két gyűrű kezdeti távolságánál. Így mindkét gyűrű rugalmas alakváltozást szenved, az 1. gyűrű külső sugara $|\Delta r_1|$ értékkel csökken, a 2. gyűrű belső sugara Δr_2-vel nő, ahol

(1) $$|\Delta r_1| + \Delta r_2 = \delta.$$



2. ábra

A két gyűrű között sugárirányú erő hat, legyen ennek nagysága egy kis $\Delta\varphi$ középponti szöghöz tartozó felületen ΔF_r. A belső gyűrű $\Delta\varphi$ szöghöz tartozó darabja ΔF_r, és az F nagyságú belső erők hatására egyensúlyban van (2. ábra), így

(2) $$\Delta F_r = 2F\,\sin(\Delta\varphi/2) \approx F\cdot\Delta\varphi.$$

F hatására a belső gyűrű kerülete $F\cdot 2\pi r_0/(Elb_1)$, sugara

(3) $$|\Delta r_1| = \frac{Fr_0}{Elb_1}$$

értékkel csökken. Hasonlóan a külső gyűrű sugarának növekedése

(4) $$\Delta r_2 = \frac{Fr_0}{Elb_2}.$$

$|\Delta r_1|$ és Δr_2 értékét (1)-be helyettesítve F kifejezhető:

(5) $$F = \frac{El\delta}{r_0}\cdot\frac{b_1 b_2}{b_1+b_2}.$$

Egy $\Delta\varphi$ középponti szöghöz tartozó felületen a súrlódási erő maximális értéke

$$\Delta S_m = \mu_0 \Delta F_r = \mu_0 \frac{El\delta}{r_0} \cdot \frac{b_1 b_2}{b_1 + b_2} \Delta\varphi, \tag{}$$

a teljes érintkező felületre összegezve

$$S_m = 2\pi\mu_0 \frac{El\delta}{r_0} \cdot \frac{b_1 b_2}{b_1 + b_2} \approx 2000 \text{ N}.$$

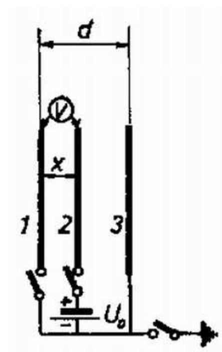
2. *A három vezető lemez egyenlő A területű, méretük sokkal nagyobb kölcsönös távolságuknál. Adva van A, d és U_0 (3. ábra).*

a) *Kikapcsoljuk a telepet, amikor a 2. lemez az $x = d/2$ helyen van, azután a 2. lemezt különböző helyzetekbe toljuk. (A 2. lemezhez vezető kapcsolót eközben nem kapcsoljuk be.) Hogyan függ az U_{12} potenciálkülönbség x-től?*

b) *Szétkapcsoljuk az 1. és 3. lemez földvezetékét is, amikor a 2. lemez az $x = d/4$ helyen van, azután az $x = d/2$ helyre visszük. Mennyi ekkor az U_{12}/U_0 hányados értéke?*

c) *Elvesszük a 3. lemezt. (A 2. lemez helye $x = d/2$ most is, és továbbra is mindegyik lemez szigetelt állapotban van.) Mennyi most U_{12}/U_0?*

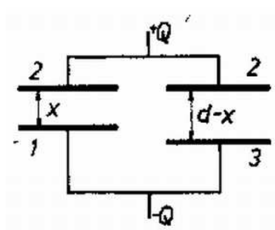
d) *Mekkora elektrosztatikus erő hat az 1. lemezre a* b) és c) esetben?



3. ábra

Megoldás. *a)* A kezdeti állapotban két párhuzamosan kapcsolt kondenzátorunk van, mivel a 2. lemez két oldala ekvipotenciális (4. ábra). A fegyverzetek területe A, távolsága $d/2$, így a 2. lemez töltése

$$Q = U_0 \cdot (C_{12} + C_{23}) = U_0 \cdot 2 \frac{A\varepsilon_0}{(d/2)} = 4U_0 \frac{A\varepsilon}{d}. \tag{1}$$



4. ábra

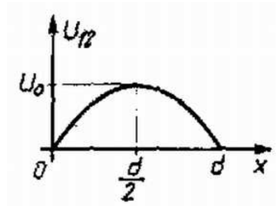
A telepet ebben a helyzetben kikapcsoljuk, így a 2. lemez töltése ezután nem változik. x változtatásával a két párhuzamosan kapcsolt kondenzátor eredő kapacitását változtatjuk:

$$C(x) = \frac{A\varepsilon_0}{x} + \frac{A\varepsilon_0}{d - x} = \frac{A\varepsilon_0 d}{x(d - x)}. \tag{2}$$

Ezt felhasználva a potenciálkülönbség a fegyverzetek között

$$U_{12}(x) = \frac{Q}{C(x)} = \frac{4U_0}{d^2} x(d - x), \tag{3}$$

x másodfokú függvénye (5. ábra).



5. ábra

b) Amikor a lemez az $x = d/4$ helyen van, (3) alapján $U_{12}(d/4) = (3/4)\,U_0$, az 1. lemez töltése

(4) $$Q_1 = -\frac{A\varepsilon_0}{(d/4)} \cdot \frac{3}{4}\,U_0 = -3\,\frac{A\varepsilon_0}{d}\,U_0.$$

Mivel ekkor a földvezetéket is szétkapcsoljuk, a lemez – és így az $1-2$ kondenzátor – töltése ezután nem változik. A 2. lemezt az $x = d/2$ helyre tolva

$$C_{12} = \frac{A\varepsilon_0}{(d/2)}, \quad U_{12} = \frac{|Q_1|}{C_{12}},$$

tehát

(5) $$\frac{U_{12}}{U_0} = \frac{3(A\varepsilon_0/d)U_0}{2(A\varepsilon_0/d)U_0} = \frac{3}{2}.$$

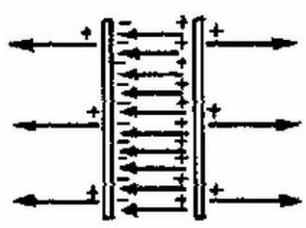
c) A 3. lemezt elvéve olyan kondenzátort kapunk, amelynek két fegyverzetén különböző nagyságú töltés van. Ekkor a feszültséget definíciója alapján, a térerősség meghatározásával számíthatjuk ki. Egy Q/A töltéssűrűségű sík lemez $E = \dfrac{Q}{2\varepsilon_0 A}$ térerősségű elektrosztatikus teret hoz létre, így a szuperpozíció elve alapján az 1. és 2. lemez által létrehozott elektromos tér a lemezek között

(6) $$E_{12} = -\frac{Q_1}{2A\varepsilon_0} + \frac{Q}{2A\varepsilon_0} = \frac{7}{2}\,\frac{U_0}{d}.$$

A lemezek között a feszültségkülönbség

(7) $$\frac{U_{12}}{U_0} = \frac{7}{2}\,\frac{U_0}{d} \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{1}{U_0} = \frac{7}{4}.$$

Megjegyzendő, hogy ekkor $3{,}5 \cdot U_0\,\dfrac{A\varepsilon_0}{d}$ adódik a kondenzátor töltésére a $Q = U \cdot C$ összefüggésből. Ekkora abszolút értékű pozitív, ill. negatív töltés van a 2. és az 1. lemez belső oldalán, a külső oldalon mindkét lemezen $+0{,}5 \cdot U_0\,\dfrac{A\varepsilon_0}{d}$ töltés van (l. a 6. ábrát).



6. ábra

d) Kondenzátorok fegyverzetére ható erőt nem számíthatjuk ki a Coulomb-törvényből, hiszen a töltésekre a saját maguk által létrehozott tér hat, így leárnyékoló hatások érvényesülnek.

Az erőt a munkatételből számíthatjuk ki. A *b)* és a *c)* esetben az egyes lemezek egymástól és a környezettől szigeteltek, így töltésük állandó. Az 1. és 2. lemez közötti térerősséget az 1. lemez belső felületének felületi töltéssűrűsége határozza meg. A *b)* esetben

$$E_{12} = \frac{|Q_1|}{\varepsilon_0 A} = 3\,\frac{U_0}{d},$$

míg a *c)* esetben

$$E_{12} = \frac{3{,}5 U_0 \varepsilon_0 A/d}{\varepsilon_0 A} = 3{,}5\,\frac{U_0}{d}.$$

Ha az 1. lemezt kicsi Δz távolsággal közelítjük a 2. lemezhez, a térerősség állandó marad, viszont az elektrosztatikus erőtér $(1/2)\varepsilon_0 E^2$ energiasűrűségének megfelelően az elektrosztatikus energia megváltozását a fegyverzetre ható F erő munkája okozza:

$$F\Delta z = (1/2)\varepsilon_0 E_{12}^2 A \cdot \Delta z,$$

ahonnan a fegyverzetre ható erő

$$F = (1/2)\varepsilon_0 A E_{12}^2.$$

A *b)* esetben

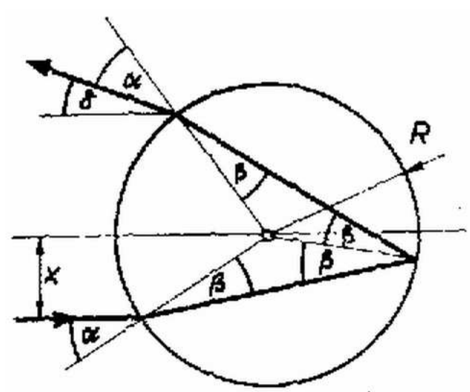
$$F_b = \frac{9}{2}\frac{\varepsilon_0 A}{d^2}U_0^2,$$

míg a *c)* esetben

$$F_c = \frac{49}{8}\frac{\varepsilon_0 A}{d^2}U_0^2.$$

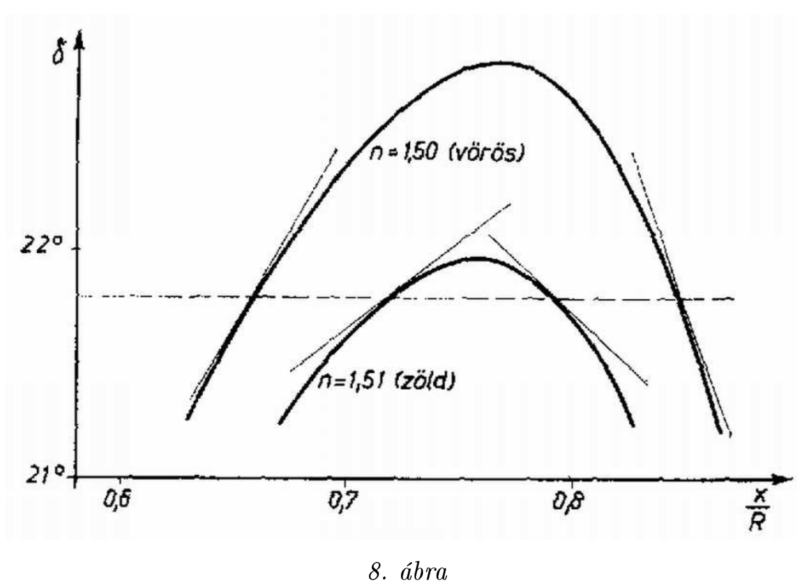
3. *Párhuzamos fénynyaláb esik egy üveggömbre; a nyaláb egyenlő intenzitású vörös és zöld fény keveréke. (A megfelelő törésmutatók: $n_{vörös} = 1{,}500$, $n_{zöld} = 1{,}510$.)*

a) *Határozzuk meg a δ elhajlási szöget az x távolság függvényében (l. a 7. ábrát). Ellenőrizzük a 8. ábra $\delta = f(x/R)$ grafikonját két számszerű adattal.*



7. ábra

b) *Határozzuk meg a belépő nyaláb azon keresztmetszetének $\Delta A/R^2$ relatív értékét, amelyben beérkező fénysugarak $\delta = 21{,}80°$ körüli $\Delta\delta$ szögtartományban verődnek vissza. (Használjuk a 8. ábra grafikonjait! A számítást végezzük el mindkét színű összetevőn!)*



8. ábra

9. ábra

c) *A 9. ábra szerint színezett, gyorsan forgó korong felületén színes köröket lehet látni. Ezek egyike ugyanolyan színű, mint az üveggömbről* $\delta = 21{,}80^\circ$*-os elhajlással visszaverődő fény. Mekkora ennek a körnek az* r *sugara? (A korong különböző színű felületrészei felületegységenként egyenlő intenzitású fényt bocsátanak ki. Hanyagoljuk el a gömbről közvetlenül – törés nélkül – visszaverődő sugarakat.)*

d) *Növekszik vagy csökken r értéke az előzőhöz képest, ha a közvetlenül visszavert sugarak intenzitása nem elhanyagolható?*

Megoldás. *a)* A 7. ábra alapján könnyen belátható, hogy

$$\delta = 360° - (\alpha - \beta) - (360° - 2\beta) - (\alpha - \beta) = 2(2\beta - \alpha).$$

A törési törvény alapján

$$\sin\alpha = \frac{x}{R}, \quad \text{és} \quad \sin\beta = \frac{x}{nR},$$

így

$$\delta = 2[\,2\mathrm{arc}\,\sin[x/(nR)] - \mathrm{arc}\,\sin(x/R)].$$

Ennek alapján a 8. ábra grafikonja ábrázolható.

b) A grafikon alapján meghatározhatók x/R azon értékei, amelyeknél az eltérülés szöge $\delta = 21{,}80°$:

	x_1	$\left(\dfrac{\Delta\delta}{\frac{\Delta x}{R}}\right)_{x_1}$	x_2	$\left(\dfrac{\Delta\delta}{\frac{\Delta x}{R}}\right)_{x_2}$
$n = 1{,}50$	0,66	18°	0,85	−30°
$n = 1{,}51$	0,72	8°	0,79	−9°

A δ körüli $\Delta\delta$ szögtartományban visszaverődő sugarak a beeső nyaláb x sugarú, Δx szélességű körgyűrű alakú keresztmetszetéből érkeznek. Ennek relatív területe

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{2x\pi\cdot\Delta x}{R^2\pi} = 2\,\frac{x}{R}\cdot\frac{\Delta x}{R} = 2\,\frac{x}{R}\cdot\left|\frac{\Delta\delta}{\frac{\Delta x}{R}}\right|^{-1}.$$

Ugyanahhoz az eltérülési szöghöz két keresztmetszet tartozik, a numerikus értékeket beírva

$$n = 1{,}50 \text{ esetén } \frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta A_1}{A} + \frac{\Delta A_2}{A} = 0{,}065\,\frac{2\Delta\delta}{1°};$$
$$n = 1{,}51 \text{ esetén } \frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta A_1}{A} + \frac{\Delta A_2}{A} = 0{,}18\,\frac{2\Delta\delta}{1°}.$$

c) A zöld és a vörös fény relatív intenzitását a beeső nyaláb megfelelő keresztmetszeteinek aránya határozza meg:

$$\frac{I_{\text{zöld}}}{I_{\text{vörös}}} = \frac{0{,}18}{0{,}065} = 2{,}8.$$

A forgó korong egy r sugarú körének színét a kör zöld és vörös színű íveinek relatív hosszúsága adja. A visszaverődő fénnyel azonos színű körre

$$\frac{180° - \gamma}{\gamma} = \frac{I_{\text{zöld}}}{I_{\text{vörös}}},$$

ahonnan $\gamma = 47°$. A kör sugara

$$r = \frac{b}{2\sin(\gamma/2)} = 1{,}25 \text{ cm}.$$

d) A gömbről közvetlenül visszaverődő sugarak intenzitása közelítőleg független a fény színétől. Így figyelembevételükkel a kétféle színű fény intenzitás-aránya 1-hez, γ értéke 90°-hoz közeledik. Ez esetünkben r csökkenésének felel meg.