Fizika feladatok megoldása zsebszámológéppel [1]

Egy-egy feladat vagy probléma megoldásakor gyakran kerülünk olyan helyzetbe, hogy a számolást nem tudjuk folytatni. Az ok különböző lehet: a megoldáshoz szükséges fizikai összefüggéseket vagy matematikai ismereteket még nem tanultuk meg (pl. azért, mert nem középiskolás anyag), vagy olyan matematikai problémába ütközünk, amelyet már csak közelítő módszerrel lehet megoldani. Ilyen esetekben a megoldást célszerű numerikus úton folytatni. A numerikus módszer hátránya, hogy sokszor rendkívül időigényes. Természetesen programozható elektronikus számológép használatával nagyon sok időt nyerhetünk, de már egy egyszerű zsebszámológép segítségével is sokszorosára növelhetjük a számolási sebességet a kézi vagy függvénytáblázattal végzett számoláshoz képest. Most egy olyan feladat megoldását mutatjuk be, amelynek analitikus megoldásához a középiskolában tanult anyag nem elegendő.

Feladat: *Mekkora a légnyomás* $5500\,\mathrm{m}$ *magasságban, ha a földön* $10\,\mathrm{N/cm^2}$*? Tegyük föl, hogy a levegő hőmérséklete mindenütt* $0\,^\circ\mathrm{C}$. A $10\,\mathrm{N/cm^2}$ *nyomású,* $0\,^\circ\mathrm{C}$ – os *levegő fajsúlya* $12{,}9\,\mathrm{N/m^3}$.

A feladat megoldásánál az okozza a nehézséget, hogy a gázok fajsúlya nyomásfüggő, így nem alkalmazhatjuk a folyadékokra érvényes ismert összefüggést. A levegő fajsúlya felfelé haladva az egyre csökkenő nyomásnak megfelelően egyre kisebb.

A legegyszerűbb közelítés az, hogy az 5500 méteres magasságot kis vastagságú rétegekre bontjuk fel. Feltételezzük, hogy az egyes rétegekben a nyomás állandó. (A felosztás finomságát ez a feltétel szabja meg, azaz olyan felosztást kell választanunk, hogy a nyomás az egyes rétegek között ne változzon nagyon erősen.) Ekkor viszont már alkalmazhatjuk a hidrosztatikában tanultakat. Bármely levegőréteg nyomása a réteg alsó síkjára egyenlő a rétegre felülről ható nyomás és a saját súlyából származó hidrosztatikai nyomás összegével.

Tekintsük az első rétegben a nyomást egyenlőnek a földön mérhető nyomással. Ekkor könnyen kiszámíthatjuk a rétegben levő levegő súlyát, illetve az abból származó nyomást. A következő rétegben a nyomás a földi nyomás és az első réteg súlyából származó nyomás különbsége. Ennek ismeretében kiszámíthatjuk a levegő sűrűségét a második rétegben is, abból a levegő súlyát és így tovább.

Az egyszerűség kedvéért 11 egyenlő részre osztjuk fel az 5500 méteres magasságot, azaz legyen a rétegek vastagsága 500 méter. Az előbbiek szerint az első réteg súlyából származó nyomás

$$500\,\mathrm{m}\cdot 12{,}9\,\mathrm{N/m^3} = 0{,}645\,\mathrm{N/cm^2}.$$

Ekkor a második rétegben a nyomás

$$10\,\mathrm{N/cm^2} - 0{,}645\,\mathrm{N/cm^2} = 9{,}355\,\mathrm{N/cm^2}.$$

Állandó hőmérsékleten a Boyle–Mariotte törvény szerint az ideális gázok fajsúlya arányos a nyomással, így a csökkent nyomásnak megfelelő fajsúly

$$12{,}9\,\mathrm{N/m^3}\cdot\frac{9{,}355\,\mathrm{N/cm^2}}{10\,\mathrm{N/cm^2}}.$$

A második intervallumon a nyomásváltozás így

$$12{,}9\,\mathrm{N/m^3}\cdot\frac{9{,}355\,\mathrm{N/cm^2}}{10\,\mathrm{N/cm^2}}\cdot 500\,\mathrm{m} = 0{,}603\,\mathrm{N/cm^2}.$$

A számítást így folytatva töltöttük ki a következő táblázatot.

Szakasz	Magasság a földtől (m)	Nyomás ($\mathrm{N/cm^2}$)	Nyomás külömség ($\mathrm{N/cm^2}$)
1	0–500	10	0,645
2	500–1000	9,355	0,603
3	1000–1500	8,752	0,564
4	1500–2000	8,187	0,528
5	2000–2500	7,659	0,494
6	2500–3000	7,165	0,462
7	3000–3500	6,703	0,432
8	3500–4000	6,271	0,404
9	4000–4500	5,866	0,378
10	4500–5000	5,488	0,354
11	5000–5500	5,134	0,331
12	5500–6000	4,803	

[1] A Lapunkban kitűzött fizika feladatok megoldásánál számológép használata természetesen megengedett. Időnként olyan feladatokat is közlünk, amelyek csak numerikus módszerrel oldhatók meg. Ezek is megoldhatók kézi számolással vagy függvénytáblázat segítségével, a zsebszámológép kizárólag némi időnyereséget jelent. Így számológéppel nem rendelkező versenyzőink nem szenvednek hátrányt.

A táblázat első oszlopa az egyes szakaszok sorszámát tünteti fel, a második a földfelszíntől mért magasságokat. A harmadik oszlop az egyes szakaszokra feltételezett (a szakaszon belül állandó) nyomásértékeket, az utolsó oszlop pedig az egyes szakaszok alja és teteje közötti számított nyomáskülönbségeket tartalmazza. Soronként egy szorzást és egy kivonást kell tehát elvégezni, ami természetesen hagyományos módon sem okoz különösebb problémát, egy egyszerű zsebszámológép azonban, különösen, ha memóriája is van, néhány percre csökkenti az egész számolási feladat elvégzésének idejét.

Az 5500 méteres magasságban levő légnyomás táblázatunk utolsó két sora szerint $5,13\,\mathrm{N/cm^2}$, illetve $4,80\,\mathrm{N/cm^2}$, ha a következő, 12. szakasz értékét fogadjuk el. Mivel nem tudjuk megmondani, hogy a 11. és a 12. szakasz határán melyik a valóságos légnyomás, eredményünk a fenti két érték közelében van, természetesen most még nem tudjuk, hogy milyen pontossággal.

Annak eldöntése, hogy a kapott eredmény milyen pontos – egy ilyen numerikus megoldásnál, – egyáltalában nem egyszerű dolog. Gyakorlatban az a legcélravezetőbb (noha elvileg nem a legbiztosabb) eljárás, hogy finomítjuk a felosztást. Amennyiben pl. felezve az intervallumokat az eredmények eltérése kisebb, mint az előírt hibahatár, a számítás eredménye kielégítő. A következő táblázatot úgy kaptuk, hogy 250 méteres rétegekre osztottuk fel az 5500 méteres magasságot.

Szakasz	Magasság a földtől (m)	Nyomás ($\mathrm{N/cm^2}$)	Nyomás külömség ($\mathrm{N/cm^2}$)
1	0–250	10	0,3225
2	250–500	9,6775	0,3121
3	500–750	9,3654	0,3020
4	750–1000	9,0634	0,2923
5	1000–1250	8,7711	0,2829
6	1250–1500	8,4882	0,2737
7	1500–1750	8,2145	0,2649
8	1750–2000	7,9495	0,2564
9	2000–2250	7,6932	0,2481
10	2250–2500	7,4451	0,2401
11	2500–2750	7,2050	0,2324
12	2750–3000	6,9726	0,2249
13	3000–3250	6,7477	0,2176
14	3250–3500	6,5301	0,2106
15	3500–3750	6,3195	0,2038
16	3750–4000	6,1157	0,1972
17	4000–4250	5,9185	0,1909
18	4250–4500	5,7276	0,1847
19	4500–4750	5,5429	0,1788
20	4750–5000	5,3641	0,1730
21	5000–5250	5,1912	0,1674
22	5250–5500	5,0237	0,1620
23	5500–5750	4,8617	

Eredményünk így $4,86\,\mathrm{N/cm^2}$, illetve $5,02\,\mathrm{N/cm^2}$, azaz összehasonlítva az 500 méteres felosztásra kapott eredményekkel, a keresett nyomásértékre azt mondhatjuk, hogy nagy valószínűséggel $5\,\mathrm{N/cm^2}$, és a hiba feltehetően néhány tized $\mathrm{N/cm^2}$. Mivel egy ilyen típusú példánál ez a pontosság elegendő, a feladatot megoldottnak tekinthetjük. (Érdekes, hogy a légnyomás közelítőleg a földi érték fele az 5500 m-es magasságban.)

Ezt a feladatot analitikusan is megoldhatjuk, ellenőrizhetjük közelítésünk helyességét. A barometrikus magasságformula segítségével a h magasságban mérhető légnyomás

$$p = p_0 \cdot \varepsilon^{-hy_0/p_0} = 4,92\,\mathrm{N/cm^2},$$

ahol p_0 a légnyomás, y_0 pedig a fajsúly a földfelszínen (l. Budó Á.: Kísérleti fizika I., 245. old.). Eredményünk tehát jónak mondható.

Általában nem áll rendelkezésre az analitikus megoldás eredménye, azaz a számolási eredmény hibáját attól függetlenül kell megbecsülnünk, például úgy, ahogyan azt bemutattuk.

A megismert eljárás klasszikus voltára és egyben modernségére is jellemző, hogy Kolumbusz is ezt a számolási módszert használta, amikor az Újvilágba navigált, de a mai elektronikus számítógépek is hasonló módon dolgoznak.

Fel kell azonban hívni a figyelmet arra, hogy bár ez a módszer egy korszerű, nagy teljesítményű gép használatával rendkívül sikeres, a fizikusnak mégis meggondoltan kell a numerikus megoldás lehetőségével élnie. Amíg ugyanis az analitikus megoldás során az egész probléma kézben tartható, a numerikus megoldás „külön életet él". Azt, hogy egy formailag jól megírt program valóban azt számolja, amit kellene, gyakran nagyon nehéz megállapítani. Az analitikus megoldás természetesen lépésenként fizikai meggondolásokkal (dimenziók, megmaradási törvények stb. szempontjából) ellenőrizhető, illetve könnyen észrevehetünk olyan általános összefüggéseket, amelyek a numerikus módszernél rejtve maradhatnak. A numerikus megoldás így napjaink nélkülözhetetlen eszköze, a számítógépek módszere, azonban alkalmazása csak a fizikai probléma teljes megértése után, jól megírt és többszörösen ellenőrizett, átgondolt program készítésével lehet eredményes.