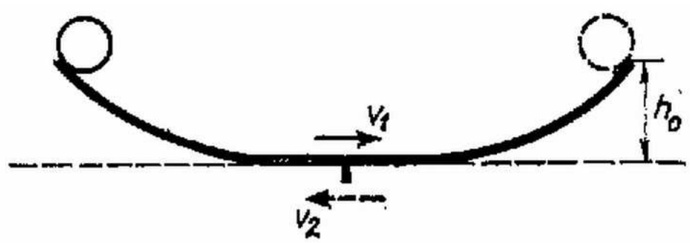
Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat 1977. október 29-én rendezte 54. versenyét Budapesten és 10 vidéki városban az 1977-ben érettségizettek és a középiskolai tanulók részére. A versenyzők 5 órai munkaidő alatt oldhattak meg három feladatot. Bármely segédeszköz használata megengedett volt. A versenyen 358 tanuló vett részt. Ismertetjük a feladatokat és megoldásukat.

1. *Adva van egy alakjára nézve szimmetrikus lejtő pár (1. ábra), a közepe nagyon lapos. A bal fele gumi, igen nagy csúszó súrlódási együtthatóval, jobb fele fém és ennek súrlódási együtthatója elhanyagolható. Egy gumihengert elengedünk a lejtő tetejéről, egyszer balról, egyszer jobbról. Melyik esetben emelkedik a henger a túlsó oldalon magasabbra?*

Károlyházy Frigyes



1. ábra

Megoldás. Indítsuk el a hengert a bal oldalról h_0 magasságból. Kezdeti helyzeti energiája mgh_0. Leérkezve középre, a henger középpontjának sebessége v_1; a henger mozgási energiája egyenlő a kezdeti helyzeti energiával:

$$mgh_0 = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{\omega^2\Theta}{2} = \frac{mv_1^2}{2}\left(1 + \frac{\Theta}{mr^2}\right);$$

m a henger tömegét, Θ a tehetetlenségi nyomatékát jelöli. Felhasználtuk, hogy a sima gördülés esetében $v_1 = \omega r$, ahol r a henger sugara és ω a szögsebessége a középre érkezéskor. A jobb oldalon felfelé haladva a henger súrlódás hiányában megtartja szögsebességét és csak az $mv^2/2$ haladási mozgási energiáját képes a h_1 magasságig való felemelkedéskor helyzeti energiává változtatni:

$$mgh_1 = \frac{mv_1^2}{2} = \frac{mgh_0}{1 + \Theta/(mr^2)}.$$

Innen a jobb oldali felemelkedési magasság:

$$h_1 = h_0 \cdot \frac{1}{1 + \Theta/(mr^2)}.$$

(Ezt a magasságot elérve a henger még pörög ω szögsebességgel.)

A hengert jobbról h_0 magasságból elengedve pörgés nélkül ér le középre, ahol középpontjának sebessége:

$$v_2 = \sqrt{2gh_0}.$$

A bal oldalon felfelé haladva a henger forgásba jön. Azonban a pörgés nélküli állapotból nem képes pillanatszerűen sima gördülésbe átmenni, egy darabig szükségképpen köszörül. A középpont egyenletesen lassuló mozgást végez, μ súrlódási együttható esetében sebessége t idővel a köszörülés kezdete után $v_2 - \mu gt$. A köszörülés befejeződik, ha $v_2 - \mu gt = \omega r$. Viszont ω mint az idő függvénye a forgó mozgás alaptörvénye szerint (a β szöggyorsulás a forgatónyomaték és a tehetetlenségi nyomaték hányadosa):

$$\omega = \beta t = \frac{\mu mgr}{\Theta} \cdot t.$$

A $v_2 - \mu gt = r\omega$ egyenletből megkapjuk a köszörülés idejét:

$$t = \frac{\sqrt{2gh_0}}{\mu g} \cdot \frac{\Theta/(mr^2)}{1 + \Theta/(mr^2)}.$$

A szögsebesség a köszörülés végén:

$$\omega = \sqrt{2gh_0} \cdot \frac{mr}{\Theta + mr^2},$$

a sebesség pedig

$$v = \omega r = \frac{\sqrt{2gh_0}}{1 + \Theta/(mr^2)}.$$

A köszörülés végére megmaradt mozgási energia:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{\omega^2\Theta}{2} = \frac{mv^2}{2}\left(1 + \frac{\Theta}{mr^2}\right) = \frac{mgh_0}{1 + \Theta/(mr^2)}.$$

Így a h_2 bal oldali emelkedésre

$$\frac{mgh_0}{1+\Theta/(mr^2)} = mgh_2,$$

amiből

$$h_2 = h_0 \cdot \frac{1}{1+\Theta/(mr^2)}.$$

Ez ugyanakkora, mint az első felemelkedési magasság. Tehát a henger mindkét oldalon ugyanolyan magasra fut fel, függetlenül a súrlódási együttható értékétől. A megoldás során feltételeztük, hogy a köszörülés a pálya vízszintes szakaszán zajlik le.

Figyelembe véve, hogy guruló hengerről van szó, $\Theta/(mr^2) = 1/2$, így az emelkedés magassága $2h_0/3$. Kiszámíthatjuk a köszörülés útját is, ez

$$s = \frac{h_0}{\mu} \cdot \frac{\left[2+\Theta/(mr^2)\right]\Theta/(mr^2)}{\left[1+\Theta/(mr^2)\right]^2}.$$

A köszörülés útja henger esetében $5h_0/9\,\mu$.

2. *Az F fényforrás egy kisméretű higanygőzlámpa, amely* 0,57 *μm hullámhosszú sárga és* 0,54 *μm hullámhosszú zöld fényt bocsát ki (a többit kiszűrtük). A lencse a fényforrást egy messze levő ernyő P helyén képezi le (2. ábra). A lencse felét egy vékony,* 1,5 *törésmutatójú planparalel lemezzel fedjük le. Milyen vastag legyen ez a lemez, hogy a fényfolt P-ben minél fényesebb és tisztán sárga színű legyen?*

Vermes Miklós

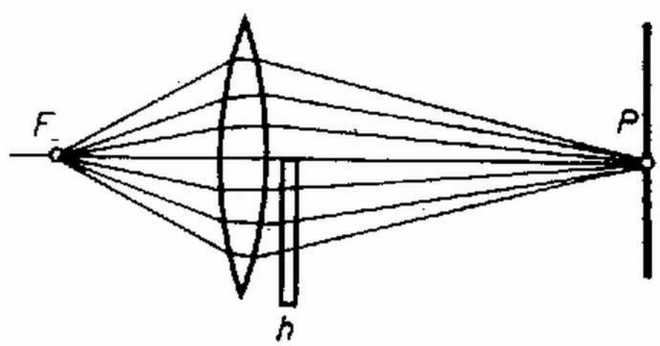
Megoldás. Mindegyik hullámhosszú fény a lemezben fáziskülönbségre tesz szert a levegőben haladóhoz képest. A lemezvastagságot úgy kell megválasztani, hogy ez a fáziskülönbség a zöld fény számára 90° páratlan, a sárga számára páros többszöröse legyen.

A sárga fény hullámhossza levegőben $\lambda_{10} = 0{,}57\ \mu$m, a lemezben $\lambda_1 = \lambda_{10}/n = 0{,}38\ \mu$m. A zöld fény hullámhossza levegőben $\lambda_{20} = 0{,}54\ \mu$m, a lemezben $\lambda_2 = \lambda_{20}/n = 0{,}36\ \mu$m ($n$ a törésmutató).

A h vastagságú rétegben a sárga fényből a lemezben nh/λ_{10}, a levegőben h/λ_{10} hullám fér el, ezek különbsége:

$$\frac{h(n-1)}{\lambda_{10}} = k_1;$$

mivel a sárga fényre erősítést kell kapnunk, ez a k_1 egész szám.



2. ábra

A zöld fényből a lemezben nh/λ_{20}, a levegőben h/λ_{20} fér el, ezek különbsége a kioltás feltétele miatt $k_2 + 1/2$ (k_2 egész szám):

$$\frac{h(n-1)}{\lambda_{20}} = k_2 + \frac{1}{2}.$$

A két egyenletet egymással elosztva:

$$\frac{\lambda_{10}}{\lambda_{20}} = \frac{19}{18} = \frac{k_2 + \frac{1}{2}}{k_1},$$

rendezve:

$$19k_1 = 18k_2 + 9.$$

Feltételünknek egész számokból álló k_1, k_2 számpárok felelnek meg. Ezek: $k_1 = 9$, $k_2 = 9$; $k_1 = 27$, $k_2 = 28$; $k_1 = 45$, $k_2 = 47$ stb. A számpárokhoz tartozó lemezvastagság a

$$h = \frac{\lambda_{10}k_1}{n-1}$$

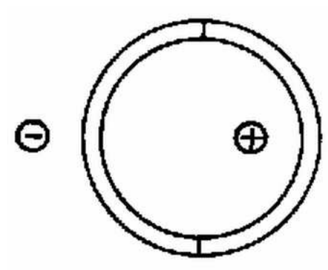
összefüggésből rendre 10,26 μm; 30,78 μm; 51,3 μm stb.

3. *Adva van a térben két kicsiny gömb, ellentétes, abszolút értékben egyenlő töltésekkel. Két félből összerakható, vékony, elektromosan semleges, fémből készült gömbhéjjal az ábrán látható módon körülvesszük az egyik töltést (*3. *ábra).*

a) *Rajzoljuk meg lehetőleg hűen az erővonal-ábrát!*

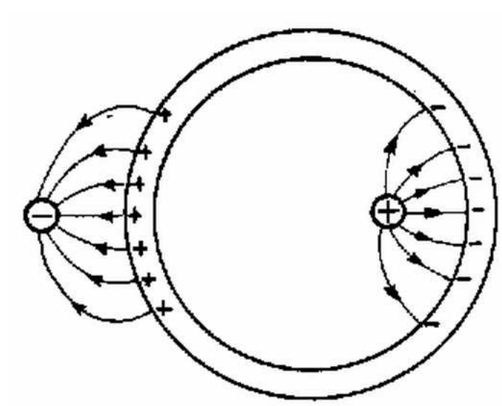
b) *Megváltozott-e a két kicsiny gömb közötti potenciálkülönbség?*

Károlyházy Frigyes



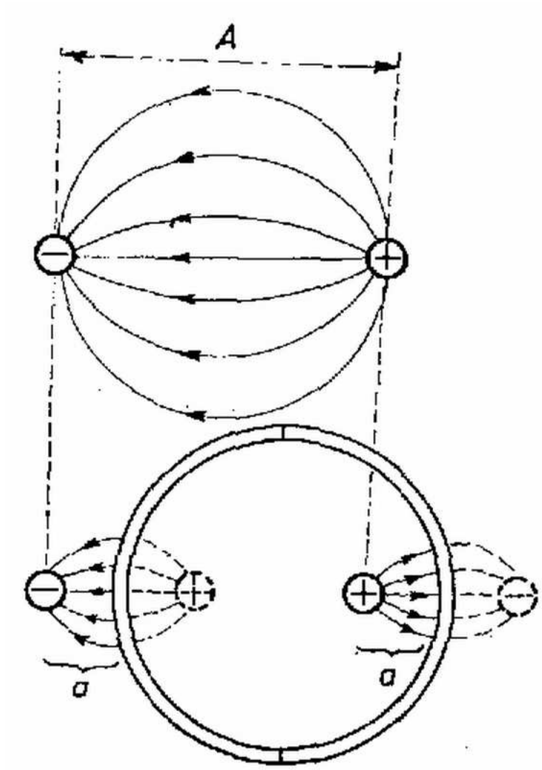
3. ábra

Megoldás. A gömbhéjban létrejövő megosztott töltések közül a pozitívak a negatív golyócska, a negatívok a pozitív golyócska közelében a gömbhéj felszínén helyezkednek el (4. ábra). A golyócskák töltéséből az erővonalak ezek felé mennek, természetesen a fém felületét merőlegesen találják el.



4. ábra

A potenciálkülönbség az egységnyi töltés átvivési munkáját jelenti. Gömbhéj nélkül az átvivés útja A (5. ábra). Gömbhéj jelenlétében az út először a, azután (mivel a fémen nincs potenciálkülönbség) munkavégzés nélkül juthatunk el a gömbhéj túlsó oldalára és ott újra a út megtevésével a pozitív golyócskához. Az utak tehát sokkal kisebbek, a térerősség azonban nagyobb.



5. ábra

Amikor még nincs ott a gömbhéj, és a negatív töltésű, ϱ sugarú golyócska felszínéről visszük át a töltésegységet a ϱ sugarú, pozitív töltésű golyócska felszínére, akkor a potenciálkülönbség:

$$U = 2kQ\left[\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{A-\varrho}\right] = \frac{2kQ}{\varrho}\cdot\frac{A-2\varrho}{A-\varrho}.$$

Ezután behelyezzük a gömbhéjat. Ha a gömb elég nagy, első közelítésben a golyócskák közelében felszínét síknak vehetjük. Ekkor az erővonalak úgy mennek a gömbhéj fala felé, mintha mögötte a távolságban $+Q$ töltés volna. Hasonló a helyzet a túlsó oldalon (tükörtöltések). Most a töltésegység átvivési munkája:

$$U = 2kQ\left[-\frac{1}{a} + \frac{1}{2a-a} + \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{2a-\varrho}\right] = \frac{2kQ}{\varrho}\cdot\frac{2a-2\varrho}{2a-\varrho}.$$

Ez a potenciálkülönbség mindaddig kisebb a gömbhéj nélkülinél, amíg a kisebb, mint $A/2$. Rajzunk ilyen esetet tüntet fel, tehát a gömbhéj behelyezése csökkenti az eredeti potenciálkülönbséget. Ha figyelembe vesszük, hogy a gömbhéj fala kissé görbült, a hosszadalmas számítás hasonló eredményt ad.

A verseny eredménye

I. díjat nyert *Neumer Attila* (Bp., Fazekas Mihály Gyak. Gimn., IV. o. t., tanára Szalay Béla és Tóth László). II. díjat nyertek *Kriza György* (Bp., Fazekas Mihály Gyak. Gimn., IV. o. t., tanára Szalay Béla és Tóth László) és *Vankó Péter* honvéd (Budapesten a Móricz Zsigmond Gimnáziumban érettségizett Sikó Attiláné tanítványaként). III. díjat nyertek *Biegl Csaba* honvéd (Budapesten a József Attila Gimnáziumban érettségizett Bakányi Márton tanítványaként) és *Magyar Zoltán* honvéd (Budapesten a Jedlik Ányos Gimnáziumban érettségizett Galántai Zsuzsa tanítványaként). Dicséretet kaptak jutalommal: *Bene Gyula* (Miskolc, Földes Ferenc Gimnázium. III. o. t., tanára Zsudel László) és *Kovács Zsolt* honvéd (Szolnokon a Verseghy Ferenc Gimnáziumban érettségizett Sebestyén István tanítványaként).