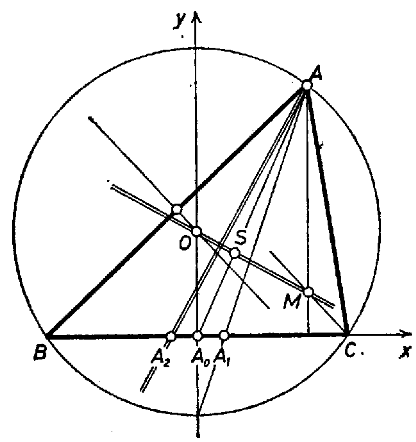
I. megoldás. Helyezzünk koordinátarendszert az alakzatra, legyen az origója A_0, x tengelye a BC egyenes, a csúcsok koordinátái $B(-a/2,\ 0)$, $C(a/2,\ 0)$, $A(d,\ m_a)$ (1 ábra.).



1. ábra

Az $AB = AC$ esetet – ill. a szokásos jelöléssel $c = b$ – eleve kizárjuk, mert ekkor a föltevés szerint $a = b = c$, a háromszög egyenlő oldalú, az állításbeli SO egyenes határozatlan, az állítás tárgytalan.

Legyen A_1 abszcisszája e, erre a szögfelező osztási aránya alapján

$$AB : AC = A_1B : A_1C,$$

$$c : b = \left(e + \frac{a}{2}\right) : \left(\frac{a}{2} - e\right)$$
$$e = \frac{a(c-b)}{2(b+c)}, \quad (\neq 0)$$

és mivel az értelmezés szerint $A_2(-e,\ 0)$, ezért az AA_2 egyenes iránytangense

(1) $$m_1 = \frac{m_a}{d+e} = \frac{2m_a(b+c)}{2d(b+c)+a(c-b)}.$$

A súlypont koordinátái: $S(d/3,\ m_a/3)$.

A körülírt kör O középpontját az AB szakasz felező merőlegese metszi ki BC felező merőlegeséből, az y tengelyből. Az AB szakasz felezőpontja és iránytangense

$$\left(\frac{d}{2} - \frac{a}{4},\quad \frac{m_a}{2}\right), \qquad \frac{m_a}{d + \dfrac{a}{2}} = \frac{2m_a}{2d+a},$$

így felező merőlegesének egyenlete, majd abból $x = 0$ helyettesítéssel O-nak y_0 ordinátája

$$y - \frac{m_a}{2} = -\frac{2d+a}{2m_a}\left(x - \frac{d}{2} + \frac{a}{4}\right),$$
$$y_0 = \frac{m_a}{2} - \frac{2d+a}{2m_a}\left(\frac{a}{4} - \frac{d}{2}\right) = \frac{4m_a^2 - a^2 + 4d^2}{8m_a}.$$

Ezekkel az SO egyenes iránytangense (mivel $d \neq 0$)

$$m_2 = \frac{y_0 - \dfrac{m_a}{3}}{-\dfrac{d}{3}} = -\frac{12d^2 + 4m_a^2 - 3a^2}{8dm_a}.$$

Az állítás szerint az $a^2 = bc$ föltevés mellett m_1 és m_2 egymás negatív reciprokai. Ennek igazolására szorozzuk számlálóját és nevezőjét $(c-b)$-vel:

(2) $$m_1 = \frac{2m_a(c^2-b^2)}{2d(c^2-b^2)+a(c-b)^2},$$

és fejezzük ki b-t, c-t a koordinátákkal:

$$b^2 = \left(d - \frac{a}{2}\right)^2 + m_a^2, \qquad c^2 = \left(d + \frac{a}{2}\right)^2 + m_a^2.$$

Innen, a $bc = a^2$ föltevést is fölhasználva

$$c^2 - b^2 = 2ad,$$
$$(c-b)^2 = c^2 + b^2 - 2a^2 = 2d^2 + 2m_a^2 - \frac{3}{2}a^2.$$

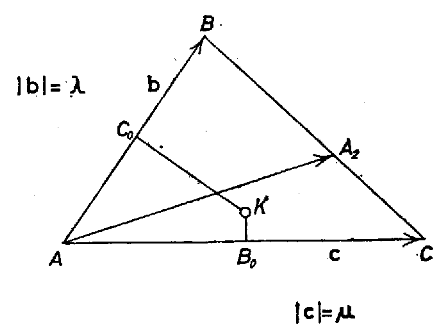
Ezekkel (2) így alakul:

$$\frac{4adm_a}{4ad^2 + a\left(2d^2 + 2m_a^2 - \frac{3}{2}a^2\right)} = \frac{8dm_a}{12d^2 + 4m_a^2 - 3a^2},$$

és ez valóban negatív reciproka m_2-nek. Ezzel az állítást bebizonyítottuk minden olyan esetre, ha $AB \neq AC$. Ismeretes ugyanis, hogy S csak az egyenlő oldalú háromszögben esik egybe O-val, másrészt $c > b$ mellett $d > 0$, $e > 0$, a felhasznált $d + e$, $2d + a$, $c - b$ nevezők, ill. szorzó mindegyike pozitív.

Stettner Eleonóra (Kaposvár, Táncsics M. Gimn., IV. o. t.)

II. megoldás. Azok számára, akik ismerik a vektorok skaláris szorzatát, leírunk egy második megoldást is. Válasszuk origónak az A csúcsot, B és C helyvektorát jelöljük rendre $\mathbf{b}$-vel, $\mathbf{c}$-vel, e vektorok hosszát λ-val és μ-vel (2. ábra).



2. ábra

Akkor A_2 helyvektora

$$\overrightarrow{AA_2} = \frac{\lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{c}}{\lambda + \mu},$$

a háromszög S súlypontjának a helyvektora pedig

$$\overrightarrow{AS} = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{c}}{3}.$$

A körülírt kör K középpontjának a helyvektora

$$\overrightarrow{AK} = y\mathbf{b} + z\mathbf{c}$$

olyan y és z skaláris mennyiségekkel, amelyekre $KC_0 \perp AB$ és $KB_0 \perp AC$, azaz amelyekre teljesül

(3) $$\left[\left(y - \frac{1}{2}\right)\mathbf{b} + z\mathbf{c}\right]\mathbf{b} = 0, \left[y\mathbf{b} + \left(z - \frac{1}{2}\right)\mathbf{c}\right]\mathbf{c} = 0.$$

Azt kell megmutatnunk, hogy $SK \perp AA_2$, azaz

$$\left[\left(y - \frac{1}{3}\right)\mathbf{b} + \left(z - \frac{1}{3}\right)\mathbf{c}\right](\lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{c}) = 0.$$

Szorozzuk meg (3)-et λ-val, (4)-t μ-vel, és a kapott egyenleteket adjuk össze:

$$(y\mathbf{b} + z\mathbf{c})(\lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{c}) = \frac{\lambda^3 + \mu^3}{2}.$$

Ennek alapján elég megmutatni, hogy

$$\frac{1}{3}(\mathbf{b}+\mathbf{c})(\lambda\mathbf{b}+\mu\mathbf{c}) = \frac{1}{2}(\lambda^3+\mu^3),$$

$$2(\lambda^3+\mu^3)+2(\lambda+\mu)\mathbf{bc} = 3(\lambda^3+\mu^3),$$
$$2\mathbf{bc} = \lambda^2+\mu^2-\lambda\mu.$$

Jelöljük BC hosszát h-val, akkor

$$2\mathbf{bc} = \lambda^2+\mu^2-(\mathbf{b}-\mathbf{c})^2 = \lambda^2+\mu^2-h^2,$$

tehát azt kell megmutatnunk, hogy $h^2=\lambda\mu$ ami viszont épp a feladatunk első feltétele; a bizonyítást befejeztük.