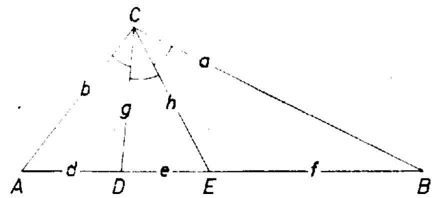
Jelöljük a háromszög csúcsait A, B, C betűvel, és legyen $AB = d + e + f$ úgy, hogy részei $AD = d$, $DE = e$, $EB = f$, továbbá legyen $CA = b$, $CD = g$, $CE = h$, $CB = a$ és $ACB\sphericalangle = \gamma$, ekkor a föltevés szerint $ACD\sphericalangle = DCE\sphericalangle = ECB\sphericalangle = \frac{\gamma}{3}$.



Fejezzük ki az ACE háromszög területét egyrészt CA, CE oldalaival és az ACE szöggel, másrészt az ACD és DCE háromszögek hasonlóan kifejezett területeinek összegeként:

$$\frac{1}{2}bh\sin\frac{2\gamma}{3} = bh\sin\frac{\gamma}{3}\cos\frac{\gamma}{3} = \frac{1}{2}(bg+gh)\sin\frac{\gamma}{3}.$$

Innen, mivel $\gamma > 0°, \sin(\gamma/3) \neq 0$,

$$\cos = \frac{\gamma}{3} = \frac{g(b+h)}{2bh}. \tag{1}$$

Betűzzük át eredményünket a DCB háromszögre, majd szorozzuk meg az új kifejezést (1)-gyel:

$$\cos\frac{\gamma}{3} = \frac{h(g+a)}{2ga},$$

$$\cos^2\frac{\gamma}{3} = \frac{(b+h)(g+a)}{4ba} = \frac{1}{4}\left(1+\frac{h}{b}\right)\left(\frac{g}{a}+1\right) = \tag{2}$$

$$= \frac{1}{4}\left(1+\frac{e}{d}\right)\left(\frac{e}{f}+1\right) = \frac{(d+e)(e+f)}{4df}$$

Felhasználtuk a továbbalakításban, hogy CD felezi az ACE szöget és CE felezi a DCB szöget, ennélfogva az ismert tétel szerint

$$\frac{CE}{CA} = \frac{DE}{DA} \quad \text{és} \quad \frac{CD}{CB} = \frac{ED}{EB},$$

így γ-t kifejeztük a d, e, f szakaszokkal

A számpéldákban rendre

$$\cos^2\frac{\gamma}{3} = \frac{3}{4}, \qquad \frac{19^2}{4\cdot 11^2}, \qquad 0{,}7$$

adódik, s mivel $\gamma/3$ mindenesetre hegyesszög, cosinusa pozitív, azért rendre

$$\begin{aligned} \cos\frac{\gamma}{3} &= \frac{\sqrt{3}}{2}, &\quad \frac{19}{22}, &\quad 0{,}8367,\\ \cos\gamma &= \left(4\cos^2\frac{\gamma}{3}-3\right)\cos\frac{\gamma}{3} = 0, &\quad -\frac{19}{11^3}, &\quad -0{,}1673,\\ \gamma &= 90°, &\quad 90°49', &\quad 99°38'. \end{aligned}$$

Megjegyzések. Az (1)-ben tulajdonképpen a b, h oldalakkal és a köztük levő szög g felezőjével meghatározott háromszög megfelezett szögét határoztuk meg, ami önmagában is érdekes eredmény.

2. Megkaphatjuk (2)-t abból is, hogy az ABC háromszög területe egyenlő az ADC, DEC és EBC háromszögek területének összegével, ha alkalmazzuk a $\sin\gamma$-t a $\sin(\gamma/3)$-mal kifejező azonosságot:

$$(2t=)\ ab\ \sin\ \gamma = ab\left(3-4\sin^2\frac{\gamma}{3}\right)\sin\frac{\gamma}{3} = (bg+gh+ha)\sin\frac{\gamma}{3},$$

$$\sin^2\frac{\gamma}{3} = \frac{3}{4} - \frac{g(b+h)+a(h+b-b)}{4ab} = 1 - \frac{(a+g)(b+h)}{4ab}.$$

3. Az I. és a II. számpélda két-két szakaszának egyenlősége alapján egyszerűbben is célhoz juthatunk. Az I. esetében $d : e = b : h = 1$, az AEC háromszög egyenlő szárú, és $CDB\sphericalangle = 90°$, továbbá $e : f = g : a = 1 : 2$, ez a $\cos DCB\sphericalangle$ értéke, tehát $DCB\sphericalangle = 60°$.

A II. esetben felhasználható a $CA = CB$ egyenlőség, ami abból adódik, hogy C két Apollóniosz-kör metszéspontja: $CA : CE = d : e = f : e = CB : CD$, és ezek egymás tükörképei AB – vagy ami most ugyanaz: DE – felező merőlegesére.