Az 1969. évi verseny beszámolóját még Hajós György akadémikus tartotta, azonban az írásbeli ismertetés elkészítésében betegsége megakadályozta. Kézirat sem maradt fenn a beszámolóról, így maradt el mind mostanáig a megoldások közlése. Amikor ezt a hiányt pótoljuk, egyben Hajós György emlékét is idézzük, aki tudományos és tudománypolitikai tennivalói mellett is fontos feladatának tekintette e verseny ügyét és rendkívüli műgonddal készítette mindig elő a beszámolókat.

1. feladat

Jelentsen n egész számot. Bizonyítsuk be, hogy ha $2+2\sqrt{28n^2+1}$ egész szám, akkor négyzetszám.

Megoldás. Jelöljük a szóban forgó kifejezést a-val:

$$2+2\sqrt{28n^2+1}=a, \quad \text{innen} \quad 7\cdot 16n^2=a(a-4).$$

Feltétel szerint a egész, ez esetben azonban párosnak is kell lennie, sőt 4-gyel oszthatónak is, mert ha páratlan, akkor $a-4$ is és $a(a-4)$ is páratlan, ha pedig páratlan szám kétszerese, akkor $a-4$ is az, s így a szorzat páratlan szám négyszerese, tehát nem osztható 16-tal. Eszerint alkalmas b egész számmal $a=4b$, és

$$7n^2=b(b-1).$$

Itt b és $b-1$ relatív prím egymáshoz, hiszen minden közös osztójuk osztója a különbségüknek, 1-nek is. Ez esetben egyiküknek négyzetszámnak kell lennie, másikuknak egy négyzetszám 7-szeresének. Ha ugyanis n, b és $b-1$ helyébe beírjuk felbontásukat prímszámhatványok szorzatára, akkor a bal oldalon a 7 páratlan hatványon fog szerepelni, a többi prímszám páros hatványon.

A jobb oldalon b és $b-1$ prím osztói különbözők.

A számelmélet alaptétele szerint[1] egy szám prímtényezős felbontása a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű, tehát a két oldalon ugyanazok a prímszámok szerepelnek és egy-egy prím a két oldalon ugyanazon a hatványon fordul elő. Ekkor b és $b-1$ egyikének a felbontásában szerepel 7-nek egy páratlan hatványa, minden más prím a két szám mindegyikében páros hatványon szerepel. A két szám egyike tehát $7n_1^2$, a másik n_2^2 alakú. Mivel $b-1$ és b egyike páros, másika páratlan, így n_1 és n_2 közül is egyik páros, másik páratlan.

Azt is tudjuk, hogy

$$7n_1^2-n_2^2 \tag{1}$$

vagy 1, vagy -1, továbbá azt is, hogy páros szám négyzete osztható 4-gyel, páratlan számé pedig 4-gyel osztva (sőt 8-cal is) 1-et ad maradékul. Eszerint $7n_1^2$ 4-gyel osztva 0 vagy 3 maradékot ad, n_2^2 pedig 1-et vagy 0-t. Az (1) szám mindkét esetben 3 maradékot ad, tehát nem lehet 1-gyel, csak -1-gyel egyenlő. Ez azt jelenti : $7n_1^2=b-1$, $b=n_2^2$. A feladatban szereplő a szám tehát ha egész, akkor fennáll rá

$$a=4b=4n_2^2=(2n_2)^2$$

vagyis négyzetszám, amint a feladat állította.

Megjegyzések. 1. A feladat nem állította és a bizonyítás sem adta közvetlenül, hogy van olyan n, amelyre kifejezésünk egész, azonban világos, hogy $n=0$-ra $a=4$. Azt is könnyű ellenőrizni, hogy $n=24$-re $a=16$. Általában, ha találunk az $n_2^2-7n_1^2=1$ egyenletnek egy nem negatív egész (n_1,n_2)-ből álló megoldását, akkor $n=n_1\cdot n_2$-re $a=(2n_2)^2$ egész. A szóban forgó egyenlet egy Pell-féle egyenlet[2], amelyiknek végtelen sok megoldása van.

2. Az, hogy (1) csak a -1 értéket veheti fel, így is belátható: n_2-t 7-tel osztva a maradék 0, ±1, ±2 vagy ±3 lehet, n_2^2-é tehát 0, 1, 4 vagy 2, azonban n_2^2+1 egyik esetben sem lesz 7-tel osztható; n_2^2-1 viszont osztható vele, ha n_2 $7k\pm1$ alakú.

2. feladat

Bizonyítsuk be, hogy ha a háromszög a, b, c oldalaira és szemközti α, β, γ szögeire

$$a(1-2\cos\alpha)+b(1-2\cos\beta)+c(1-2\cos\gamma)=0 \tag{2}$$

teljesül, akkor a háromszög szabályos.

---

[1] Bizonyítását lásd pl. Kürschák J.–Hajós Gy.-Neukomm Gy.– Surányi J.: *Matematikai Versenytételek* I. 3. kiad. Tankönyvkiadó Budapest, 1965. 21–23. old. és 32–33. old. vagy: Erdős P.–Surányi J.: *Válogatott fejezetek a számelméletből*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1960. 15-17. old.

[2] A Pell-féle egyenletek megoldásáról lapunk következő számaiban olvashatunk egy cikksorozatot. 53. kötet 2. szám 49–52., 54. kötet, 1. szám 1–3., 5. szám 193–197., 55. kötet, 2. szám 55–58., 56. kötet 1. szám. 1–4., 5. szám 193–196. oldalakon.

I. megoldás. Szorozzuk meg (2)-t pl. $\dfrac{\sin\gamma}{c}$-vel és alkalmazzuk a szinusz-tételt, ekkor a bal oldala így alakul:

$$\frac{a}{c}\sin\gamma(1-2\cos\alpha)+\frac{b}{c}\sin\gamma(1-2\cos\beta)+\sin\gamma(1-2\cos\gamma)=$$
$$\sin\alpha(1-2\cos\alpha)+\sin\beta(1-2\cos\beta)+\sin\gamma(1-2\cos\gamma)=$$
$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-(\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma).$$

A két összeget külön-külön átalakíthatjuk:

$$\sin\gamma=\sin\big(\pi-(\alpha+\beta)\big)=\sin(\alpha+\beta)$$

ill.

$$\sin 2\gamma=\sin\big(360^\circ-2(\alpha+\beta)\big)=-\sin 2(\alpha+\beta)$$

felhasználásával.

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=$$

$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2};$$

$$\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)=$$
$$=2\sin(\alpha+\beta)2\sin\alpha\sin\beta=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=$$
$$=32\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

(2) bal oldala ennek alapján így írható :

$$4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\left(1-8\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right). \tag{3}$$

Itt a második tényező semmilyen háromszögben nem negatív, és 0 is csak szabályos háromszög esetén lesz. Lényegében ennek bizonyítása volt az 1897. évi verseny 2. feladata:

$$8\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=4\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\frac{\gamma}{2}\leqq 4\left(1-\sin\frac{\gamma}{2}\right)\sin\frac{\gamma}{2}=$$
$$1-\left(1-2\sin\frac{\gamma}{2}\right)^2\leqq 1,$$

és egyenlőség csak akkor állhat fenn a második helyen, ha

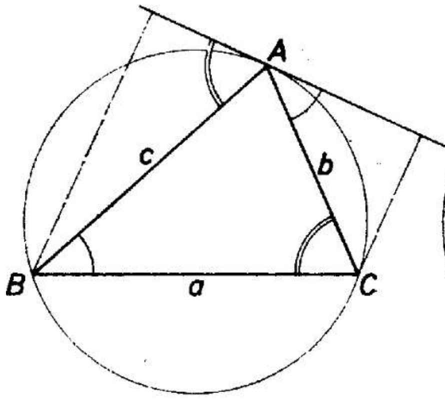
$$\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2},$$

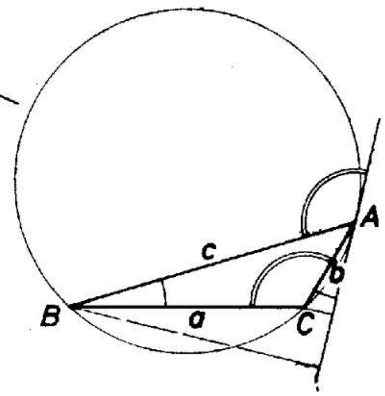
az első egyenlőtlenségnél pedig csak ha $\alpha=\beta$, mert 180°-nál kisebb szögekről van szó. A kettőből $\alpha=\beta=\gamma=60^\circ$ vagyis a háromszög szabályos. Minden más háromszögre (3) minden tényezője pozitív. Ezzel a bizonyítandó állítást nyertük.

II. megoldás. Rajzoljuk meg a háromszög köré írt kört, az A csúcsban az érintőjét, és erre vetítsük rá a $BC=a$ oldalt. A kerületi szögek tétele alapján az érintőnek a harmadik csúcsot nem tartalmazó íveket érintő félegyenesei az $AC=b$ és $AB=c$ oldallal β, illetve γ szöget zárnak be, s így a vetület $b\cdot\cos\beta+c\cdot\cos\gamma$, tehát

$$a\geqq b\cdot\cos\beta+c\cdot\cos\gamma.$$

A jobb oldal tompaszögű háromszög esetén lehet negatív is, ekkor még az abszolút értéke is kielégíti az egyenlőtlenséget. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha az érintő párhuzamos a BC oldallal, azaz ha $AB=AC$.





A másik két oldalra is felírva a megfelelő egyenlőtlenséget, és összeadva azt kapjuk, hogy

$$a + b + c \geqq 2a \cdot \cos\alpha + 2b \cdot \cos\beta + 2c \cdot \cos\gamma,$$

és egyenlőség akkor áll fenn, ha az oldalak mind egyenlők, és ezt akartuk bizonyítani.

3. feladat

Egy sakktábla minden mezejére kockát helyeztünk. Ezek lapjai a mezőkkel egybevágóak. Minden kockának van fekete lapja. Azt akarjuk elérni, hogy fölül csak fekete lapok legyenek. Bizonyítsuk be, hogy ezt el lehet érni, ha kockát csak úgy mozgathatunk el, hogy teljes sorával vagy oszlopával elforgatjuk annak hossztengelye körül!

Megoldás. Azt, hogy egy kiszemelt kocka felső lapja fekete legyen, elérhetjük az oszlopának a forgatásával, kivéve, ha a kockának csak a hátsó vagy első lapja fekete. Ekkor a kocka során kell egyet fordítani.

A sor forgatásánál a jobb és bal oldalsó lapja nem mozdul el a helyéről, csak a középpontja körül forog. Ugyanez történik az első és hátsó lappal az oszlopok forgatásakor.

Ezek alapján ha egy sor felső lapját akarjuk feketévé tenni, akkor így járhatunk el:

a sor első lapját a sor tengelye körül felülre fordítjuk, majd a felülre került fekete kocka lapokat a kocka oszlopának elfordításával oldalra fordítjuk.

Ezután az eredetileg hátsó (most alsó) oldalt fordítjuk a sor elforgatásával fölülre, majd a fölülre került fekete lapokat oldalra, majd az eredetileg felső lapot újra felülre.

Azoknak a kockáknak, amelyeknek a felső lapja most nem fekete, azoknak alsó vagy valamelyik oldalsó lapja fekete, mert amelyiknek eredetileg első vagy hátsó lapja fekete volt, annak most valamelyik oldalsó lapja az. Így most már alkalmas oszlopok forgatásával elérhető, hogy a sor felső lapja fekete legyen.

Ha most egy másik sor felső oldalát akarjuk feketévé tenni, ahhoz a sorok közül csak őt magát forgatjuk. Ahhoz, hogy a fekete felső oldalú sorokat az oszlopok forgatása ne zavarja, ezeket a fekete lapokat a sor elfordításával átmenetileg pl. előre forgatjuk.

Ha így az utolsó sor felső lapját is feketére cseréltük, akkor a korábbi sorokat úgy fordítjuk, hogy fekete oldaluk felülre jusson. Ezzel az egész felső lapot feketére változtattuk.

Megjegyzés. Az eljárásban nem játszott szerepet a sorok vagy oszlopok száma, így az bármilyen téglalap alakú tábla esetén alkalmazható.