I. forduló

Kezdők (legfeljebb I. osztályosok)

1. Az ABC egyenlő szárú háromszög C csúcsát kössük össze a háromszög AB alapjának D és E harmadoló pontjaival ($AD = DE = EB$).
Bizonyítsuk be, hogy $DCA\sphericalangle < ECD\sphericalangle$.

2. Bizonyítsuk be, hogy ha $b \neq 2a$, akkor

$$\frac{a^3+b^3}{a^3+(a-b)^3} = \frac{a+b}{a+(a-b)}.$$

3. András és Béla sakkoznak. Andrásnak 6 másodperccel kevesebb, Bélának 10 másodperccel több időre van szüksége ahhoz, hogy saját sakkfiguráit felállítsa a sakktáblára, mint amennyi időre akkor lenne szükség, ha az összes sakkfigurát közösen raknák fel. Mennyi idő alatt rakja fel ki-ki a saját sakkfiguráit?

4. Egy nő az A községből 10 óra 31 perckor indult el és egyenletesen haladva 13 óra 43 perckor érkezett B községbe. Ugyanezen a napon B községből 9 óra 13 perckor egy férfi indult el ugyanezen az úton ugyancsak egyenletesen haladva és 11 óra 53 perckor érkezett A községbe. Útközben egyszerre értek egy széles folyó hídjához (ki-ki a számára közelebbi végponthoz). A nő egy perccel később hagyta el a hidat, mint a férfi. Mikor értek a hídhoz? Határozzuk meg a híd végpontjainak helyzetét A-hoz és B-hez viszonyítva.

5. Egy O középpontú kör egyik átmérőjének a végpontjait A és B jelöli. Tekintsük a körvonal egy tetszőleges P pontját, vetítsük azt merőlegesen a rögzített AB átmérőre, és jelölje P' a P pont vetületét. Az OP sugáron vegyük azt a Q pontot, amelyre $OQ = OP'$. Mi a Q pontok mértani helye, ha P befutja az egész körvonalat?

6. 24 papírlap közül néhányat 10 részre vágtak, majd az így kapott részek közül néhányat ismét 10 részre vágtak szét, és így tovább. Egy ilyen munkaszakasz után valaki ezt mondta: „Most 1978 papírdarabunk van." Jól számolt-e az illető?

7. Adott a síkon négy olyan pont, hogy bármelyik három által meghatározott háromszög magasságpontja éppen a negyedik pont. Bizonyítsuk be, hogy ezen háromszögek köré írt körök sugarai ugyanakkorák.

8. Az alábbi szorzásban a betűk számjegyeket jelentenek, egyező betűk egyezőket, különböző betűk különbözőket (a tízes számrendszerben). Határozzuk meg a betűknek megfelelő számjegyeket úgy, hogy a szorzás helyes legyen.

$$\begin{array}{cccccc}
 & \overline{A} & \overline{B} & \overline{C} & \times\ A\ B\ C & \\
D & E & F & G & & \\
 & H & H & C & B & \\
 & & A & D & F & D \\
\hline
H & D & K & G & E & D
\end{array}$$

Haladók (II. osztályosok)

1. Mely x, y, z, t számjegyekre teljesül az $\overline{xyzt} - \overline{xyz} - \overline{xy} - \overline{x} = 1761$ egyenlőség? ($\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ egy 10-es számrendszerben felírt n-jegyű számot jelent.)

2. Egy konvex négyszög átlóinak M metszéspontján át az egyik oldallal párhuzamosan húzott egyenes négyszögbe eső részét M pont felezi. Igazoljuk, hogy a négyszög trapéz!

3. A kétjegyű egész számok között kétféleképp is értelmezhetjük két szám „távolságát":
a) két szám „távolsága" legyen különbségük abszolút értéke,
b) az $\overline{xy}$ és $\overline{pq}$ számok „távolsága" legyen $\sqrt{(x-p)^2+(y-q)^2}$.
Határozzuk meg mindazokat a számpárokat, amelyek a kétféle „távolság"-fogalom szerint egyforma távol vannak!

4. Határozzuk meg $99^{99} - 51^{51}$ utolsó két számjegyét!

5. A síkon úgy helyezkedik el hat pont, hogy közülük semelyik öt nincs egy egyenesen. Igazoljuk, hogy ekkor két hármas csoportba oszthatók úgy, hogy mindkét csoport valódi háromszöget határoz meg!

6. Adjuk meg azokat az egész számokat, amelyekre az $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 5$ polinom értéke prímszám.

7. Van-e olyan számrendszer, amelyben az n jegyből álló $\overline{cc\dots c}$ szám egyenlő c^n-nel, ahol $n \geq 2$?

8. Adott egy konvex négyszög. Az egyik csúcsán át szerkesszünk olyan egyenest, amely a négyszöget két egyenlő területű részre vágja!

II. forduló

Kezdők (I. osztályosok)

Az általános tantervű osztályok feladatai

1. Két test egy körpályán mozog, melynek kerülete 120 m. Az egyik test egybevágó a pálya 1/4-ívével (a pályán mintegy csúszik), a másik test pontszerű; másodpercenként megtett útjuk 1 méter, illetve 3 méter. Az első test állandóan az egyik körüljárás irányában mozog, a második pedig – amikor nekiütközik amannak, akár elölről, akár hátulról – megfordul. Egy bizonyos pillanatban a nagy test eleje és a kis test a pálya egy átmérőjének végpontjain halad át, egymással szemben (a pálya mentén értve). Azt várjuk, hogy ez az állapot egy idő múlva megismétlődik, ugyanazokban a pontokban. Mennyi idő telik el addig?

2. A sík tetszőleges ABC háromszögének AB és BC oldalára egy-egy szabályos ABP és BCQ háromszöget illesztünk. A B pontot a PQ szakasz felezőpontjára tükrözzük. Jelöljük ezt a pontot R-rel. Igazoljuk, hogy az ACR háromszög is szabályos.

3. Bizonyítsd be, hogy egy (konvex vagy konkáv) ötszögnek mindig van olyan csúcsa, amelyből az ötszög minden pontja látható. (Egy P pont az A csúcsból látható, ha az AP szakasz az ötszögben halad.)

A szakosított matematika I. tantervű osztályok feladatai

1. Megegyezik az általános tantervű osztályok 1. feladatával.

2. Egy asztallapra helyezzünk el n db tízfillérest (egymást át nem fedhetik, de érintkezhetnek). Bizonyítsuk be, hogy az érintkezési pontok száma kevesebb, mint $3n$.

3. Legyenek a, b, c pozitív egészek, $a < b < c$, továbbá tudjuk, hogy a, b, c mindegyike osztója a másik kettő összegének. Határozzuk meg a $\frac{b}{a}$ és $\frac{c}{a}$ hányadosok értékét.

A szakosított matematika II. tantervű osztályok feladatai

1. Egy táblára felírtuk az $1, 2, 3, \ldots, 1978$ számokat. Ezek közül két tetszőleges számot letörlünk, és helyettük a különbségüket írjuk fel. Ezt a műveletet addig ismételjük, amíg csak egyetlen 0-tól különböző szám marad. Bizonyítsuk be, hogy ez a szám páratlan!

2. Igazoljuk, hogy ha a, b és c egymástól és zérustól különböző számok és $a + b + c = 0$, akkor

$$\left(\frac{a-b}{c^2}+\frac{b-c}{a^2}+\frac{c-a}{b^2}\right)\left(\frac{c^2}{a-b}+\frac{a^2}{b-c}+\frac{b^2}{c-a}\right)=4abc\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^3.$$

3. Jelöljük p_k-val a k-adik törzsszámot ($p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11$, $p_6 = 13, \ldots$). Legyen $n > 3$, n egész, $N = \frac{1}{2}(p_n + 1)$. Bizonyítsuk be, hogy az

$$1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ \ldots,\ (N-1)^2,\ N^2$$

számok közül ki lehet választani legalább $N - n + 1$ darab különbözőt úgy, hogy a kiválasztottak közül bármely két különböző szám különbsége összetett szám legyen.

Haladók (II. osztályosok)

Általános tantervű osztályok részére

1. Az e és f párhuzamos egyenesek közé eső P pont távolsága e-től a, f-től b. Határozzuk meg a legkisebb területű EPF háromszög oldalait, ha a háromszög P-nél levő szöge derékszög, E csúcsa az e egyenesre, F pedig f-re esik!

2. Egy körbe írt konvex hétszögnek van három $120°$-os szöge. Mutassuk meg, hogy ekkor a hétszögnek van két egyenlő oldala!

3. Az $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \le 0$ egyenlőtlenség minden olyan $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ számra fennáll, amelyre $b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n \le 0$. Igazoljuk, hogy ekkor van olyan nemnegatív c szám, amelyre $a_1 = cb_1$, $a_2 = cb_2, \ldots, a_n = cb_n$!

A szakosított matematika I. tantervű osztályok részére

1. Igazoljuk, hogy az $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ hosszúságú szakaszokból akkor és csak akkor szerkeszthető háromszög, ha tetszőleges p, q valós számokra, amelyekre $p + q = 1$, teljesül, hogy

$$pa^2 + qb^2 > pqc^2.$$

2. Megegyezik az általános tantervű osztályok 2. feladatával.

3. Egy szabályos n-szög csúcsaiba beírjuk az $1,\ 2,\ \ldots,\ n$ számokat valamilyen sorrendben. Ezek után minden élre ráírjuk a végpontjaiba írt számok különbségének abszolút értékét. Mennyi az élekre írt számok összegének lehetséges minimális értéke? Hány olyan elrendezése van az $1,\ 2,\ \ldots,\ n$ számoknak, amelyek mellett ez a minimum fellép, ha az elforgatással egymásba átvihető elrendezéseket nem tekintjük különbözőknek?

A szakosított matematika II. tantervű osztályok részére

1. Hány oldalú lehet az a körbe írt sokszög, amelynek van három $120°$-os szöge, és oldalai különböző hosszúságúak?

2. Állítsuk nagyságrendi sorrendbe a következő számokat:

$$\underbrace{4^{4^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{4}}}}}}_{n\text{-szer}} \qquad \underbrace{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}_{(n+1)\text{-szer}} \qquad \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{(n+2)\text{-szer}}$$

A hatványozást felülről kezdjük, így pl.

$$2^{2^{2^{2}}} = 2^{2^{4}} = 2^{16}.$$

3. Az $19785\ldots$ sorozatban az 5-östől kezdve minden számjegy az előtte álló négy számjegy összegének utolsó jegye. Bizonyítsuk be, hogy az 1978 számjegycsoport másodszor is fellép a sorozatban, az 1526 számjegycsoport viszont sohasem fordul elő!