I. forduló

1. Melyek azok a számpárok, amelyeknek legnagyobb közös osztója 15, legkisebb közös többszöröse 4725?

2. Egy r sugarú körbe $2n$ oldalú ($n \geq 2$, egész szám) szabályos sokszöget írunk. Jelölje P a kör kerületének tetszőleges pontját! Bizonyítsuk be, hogy a P pontnak a sokszög csúcsaitól mért távolságait négyzetre emelve és összeadva P-től független számot kapunk!

3. Igazoljuk, hogy tetszőleges x valós számra teljesül az

$$x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 > 0$$

egyenlőtlenség!

4. Oldjuk meg az

$$x - \frac{100}{2^{100}} = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{4}(x+2) + \frac{1}{8}(x+3) + \ldots + \frac{1}{2^{100}}(x+100)$$

egyenletet!

Hány jegyű a megoldás a 10-es számrendszerben?

5. Határozzuk meg az összes olyan négyjegyű természetes számot (jelöljük N-nel), amelyre
a) $N = p \cdot q \cdot r$, ahol p, q, r különböző prímszámok;
b) $pq - r = 3$;
c) $pq + r$ prímszám!

6. Egy háromoldalú gúla egyik csúcsában találkozó a, b, c élek bármelyike merőleges a másik kettőre.
Igazoljuk, hogy az ebből a csúcsból induló m magasságra

$$\frac{1}{m^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

7. Egy négyzet alakú erdő tízezer fából áll. A fák észak-déli, illetve kelet-nyugati irányú négyzetrács szomszédos rácspontjaiban helyezkednek el úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban száz fa van. Egy kismadár bármelyik fáról a tőle északi, délnyugati vagy délkeleti irányban levő legközelebbi fára repülhet.

Mutassuk meg, hogy bármelyik fáról el tud jutni bármelyik fára! Visszatérhet-e kiindulópontjára 50 felröppenés után?

8. A sík tetszőleges $(x;\ y)$ koordinátájú pontjához rendeljük hozzá az $(x+y;\ x-y)$ koordinátájú pontot! Igazoljuk, hogy ennél a hozzárendelésnél tetszőleges téglalap képe olyan téglalap, amelynek területe az eredeti téglalap területének kétszerese!

II. forduló

Szakközépiskolák, valamint gimnáziumok általános tantervű osztályai tanulóinak

1. Jelölje x_1, x_2 és x_3 az $x^3 + px + q = 0$ egyenlet három gyökét! Bizonyítsuk be, hogy ekkor $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = 5pq$.

2. Legyen f az $x = 1$ hely kivételével minden valós számra értelmezett olyan függvény, amely bármely $x \neq 0$ esetén eleget tesz az

$$f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{cx}{x-1}$$

egyenletnek!

Számítsuk ki a c valós paraméter értékét, ha tudjuk, hogy

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 5.$$

3. Számítsuk ki az egységnyi élű kocka azon részének térfogatát, amelynek pontjai bármelyik csúcstól legalább akkora távolságra vannak, mint a kocka középpontjától!

A matematika I. szakosított tantervű osztályok tanulói részére

1. Az $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$ sorozatot a következő módon képezzük: $a_1 = 5$, $a_{n+1} = a_n^2$ ($n = 1,\ 2,\ \ldots$). Bizonyítsuk be, hogy a sorozat n-edik és $(n+1)$-edik eleme ugyanazzal az n-jegyű számmal végződik!

2. Megegyezik az általános tantervű osztályok 3. feladatával.

3. Bizonyítsuk be: az e egyenesen bárhogyan választunk is ki n^2+1 zárt A_iB_i szakaszt ($i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n^2+1$), közöttük mindig van $n+1$ olyan, amelyek egyike sem tartalmaz ezek közül teljes egészében egy másikat, vagy pedig van $n+1$ olyan, amely egymásba skatulyázott.

Megjegyzések: A zárt szakasz végpontjait is tartalmazza. A zárt szakaszok egy A_iB_i ($i = 1, 2, \ldots$) sorozata egymásba skatulyázott, ha a sorozat bármely eleme – kivéve az utolsót (ha van ilyen) – teljes egészében tartalmazza az őt követő szakaszt.

A matematika II. szakosított tantervű osztályok tanulói részére

1. Megegyezik az általános tantervű osztályok 3. feladatával.

2. Egy rádiócsövön n kivezetés és a foglalatában n lyuk van. Ezek egy szabályos n szög csúcsaiban helyezkednek el, és a csövet mind az n-féleképpen betehetjük a foglalatába. A kivezetéseket 1-től n-ig megszámozták. Milyen n-ekre lehet a lyukakat az 1-től n-ig terjedő számokkal úgy megszámozni, hogy a cső minden helyzetében legalább egy kivezetés a vele azonos számozású lyukban legyen?

3. Határozzuk meg azokat a valós számokon értelmezett, valós értékű folytonos f függvényeket, amelyek minden x-re eleget tesznek a következő feltételeknek:
a) $|f(x)| + |f(x+1)| = 1$,
b) $f(2x) = 2|f(x)| - 1$,
c) ha $f(x) = 0$, akkor x egész szám, $f(0) > 0$.