A Gy. 1799. gyakorlatban (lásd ezen számunk 220. oldalán) legnagyobb közös osztóról, legkisebb közös többszörösről van szó. Két szám legnagyobb közös osztója, illetve legkisebb közös többszöröse lehet a két szám egyike, de lehet egy harmadik szám is. Például 12 és 4 legnagyobb közös osztója, amit $(12,4)$-gyel szokás jelölni, 4; legkisebb közös többszörösük, aminek jele $[12,4]$, éppen 12. Hasonlóan $(12,12)=12$; $(12,9)=3$; $(12,5)=1$; $[12,6]=12$; $[12,12]=12$; $[12,8]=24$. (Ha a két szám egyenlő, a legnagyobb közös osztójuk és legkisebb közös többszörösük természetesen ugyanannyi.) Akármelyik eset fordul is elő a fentiek közül, két szám legnagyobb közös osztójának, illetve legkisebb közös többszörösének megkeresését tekinthetjük olyan műveletnek, amely két számhoz egy harmadik számot rendel hozzá.

A matematikában gyakran fordulnak elő olyan műveletek, amelyek egy halmaz elemeiből képzett párokhoz a halmaz egy-egy elemét rendelik. Az ilyen műveleteket kétváltozós műveleteknek nevezzük. (Vannak nem kétváltozós műveletek is. Például az, amelyik minden számhoz az ellentettjét rendeli, egyváltozós.)

Néhány példa kétváltozós műveletekre:

a halmaz:	a művelet :
1. a természetes számok	a legnagyobb közös osztó képzése
2. a természetes számok	a legkisebb közös többszörös képzése
3. a valós számok	az összeadás
4. a valós számok	a kivonás
5. a racionális számok, kivéve a 0-t	az osztás
6. a 0 és 1 elemekből álló halmaz	a szorzás
7. a $[0,x]$ szakaszok halmaza, ahol $x\geqq 0$	a halmazelméleti metszet művelet
8. a $[0,x]$ szakaszok halmaza, ahol $x\geqq 0$	a halmazelméleti unió művelet.

Gyakran fordul elő, hogy ugyanazon a halmazon nem egy, hanem két kétváltozós műveletet is definiálunk. A fenti példák közül az 1–2., 3–4., 7–8. ilyenek. A továbbiakban, – hogy általában is beszélhessünk ezekről – a halmazt H-val, elemeit az x, y, z stb. betűkkel, végül a két kétváltozós műveletet $\wedge$, illetve $\vee$ jelekkel jelöljük. A $\wedge$, $\vee$ műveleteket rendszerint metszetnek,illetve uniónak mondják, de ezek a műveletek (általában) különböznek a szokásos halmazok között értelmezett metszet ($\cap$) és unió ($\cup$) műveletektől. Persze nagyon sokféleképpen lehet a H halmazt kijelölni és azon két kétváltozós műveletet megadni. A továbbiakban csak azokat az eseteket vizsgáljuk, amelyekben a $\wedge$, $\vee$ műveletek eleget tesznek a következő kikötéseknek:

Ia	$x\wedge x=x,$	**Ib**	$x\vee x=x$
IIa	$x\wedge y=y\wedge x$	**IIb**	$x\vee y=y\vee x$
IIIa	$x\wedge(y\wedge z)=(x\wedge y)\wedge z$	**IIIb**	$x\vee(y\vee z)=(x\vee y)\vee z$
IVa	$x\wedge(y\vee x)=x$	**IVb**	$x\vee(y\wedge x)=x$

Ha egy H halmazon a $\wedge$, $\vee$ műveletek olyanok, hogy kielégítik a felsorolt nyolc kikötést – matematikai nyelven szólva axiómát –, akkor a H halmazt a rajta értelmezett $\wedge$, $\vee$ műveletekkel *hálón*ak nevezzük, és ezt így írjuk: $(H,\wedge,\vee)$ háló.

Mit jelentenek valójában a formulákkal leírt *hálóaxiómák*? Az **Ia** és **Ib** azt mondja ki, hogy a halmaz két azonos eleméhez mindkét művelet magát az elemet rendeli. A **IIa** és **IIb**,illetve **IIIa** és**IIIb** axiómák – a valós számok összeadásánál és szorzásánál már megismert – kommutatív, illetve asszociatív tulajdonság teljesülését követelik meg. Legérdekesebbek és a hálókra „legjellemzőbbek” a **IVa**, **IVb** axiómák. Ezek a $\wedge$, $\vee$ műveletek egymáshoz való viszonyára vonatkoznak, azt mondják ki, hogy a hálóban a $\wedge$, $\vee$ műveletek között milyen összefüggésnek kell lennie.

Nézzük meg, hogy kiindulási példánkban, az $\big(\mathbf{N},\ (\ ),\ [\ ]\big)$-ban – ahol **N** a természetes számok halmazát, ( ) és [ ] a legnagyobb közös osztó képzés,illetve a legkisebb közös többszörös képzés műveletét jelöli –, teljesülnek-e a háló-axiómák? Jelöljük a természetes számokat $m,n,k,\dots$ betűkkel.

Az **Ia**, **Ib** axiómák nyilván teljesülnek, mert

$(m,m)=m$ és $[m,m]=m.$

A **IIa**, **IIb** axiómák is teljesülnek, mert két szám legnagyobb közös osztója és legkisebb közös többszöröse nem függ a számok sorrendjétől, azaz:

$(m,n)=(n,m)$ és $[m,n]=[n,m].$

A **IIIa**, **IIIb** axiómák is fennállnak hiszen már az **I.** osztályban bizonyítottuk, hogy

$\big(m,(n,k)\big)=\big((m,n),k\big)$ és $\big[m,[n,k]\big]=\big[[m,n],k\big].$

A **IVa**, **IVb** axiómák teljesülését is könnyen beláthatjuk annak alapján, hogy két szám legnagyobb közös osztója nem nagyobb, mint a két szám bármelyike, és két szám legkisebb közös többszöröse nem kisebb, mint a két szám bármelyike.

Tehát a hálóaxiómák teljesülnek, máris láttunk egy „élő” hálót. Ebben a hálóban – az 1799. gyakorlat szerint – még az alábbi két összefüggés is igaz:
$\big(m,[n,k]\big)=\big[(m,n),(m,k)\big]$ és $\big[m,(n,k)\big]=\big([m,n],[m,k]\big)$.
Ezek az összefüggések a hálók általános nyelvén így írhatók:

$$\mathbf{Va}\qquad x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z)\qquad\mathbf{Vb}\qquad x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge(x\vee z)$$

Az **Va**, **Vb** összefüggések a két hálóműveletnek – a valós számok szorzásánál és összeadásánál ugyancsak ismert – disztributív tulajdonságát mondják ki. Az olyan hálókat, amelyekben az **Va**, **Vb** tulajdonságok is teljesülnek, *disztributív háló*knak hívják.

Lássunk további példákat hálókra!

1. Legyen H az egészek halmaza és legyen a k, l egészekre

$$k\vee l=\max(k,l),\quad\text{illetve}\quad k\wedge l=\min(k,l).$$

2. Álljon H az „igaz” és „hamis” elemekből, $\wedge$ és $\vee$ legyenek a logikában szereplő „és”, illetve „vagy” műveletek, azaz az alábbi művelettáblák írják le a $\wedge$, illetve $\vee$ műveleteket:

$\wedge$	igaz	hamis
igaz	igaz	hamis
hamis	hamis	hamis

$\vee$	igaz	hamis
igaz	igaz	igaz
hamis	igaz	hamis

3. Legyen M egy halmaz, álljon H az M összes részhalmazaiból, az üres halmazt is beleértve. Ekkor H-nak A, B elemeire (melyek M-nek részhalmazai) legyen $A\wedge B=A\cap B$ és $A\vee B=A\cup B$. Az így kapott hálót M részhalmazhálójának szokás nevezni.

4. Legyen H a $[0,1]$ intervallumon értelmezett valós függvények halmaza. Tetszőleges H-beli f_1 és f_2 elemekre (függvényekre) legyen $f_1\wedge f_2$ az a h, amelyre $h(x)=\min\big(f_1(x),f_2(x)\big)$, ha $0\leqq x\leqq 1$, illetve $f_1\vee f_2$ az a g, amelyre $g(x)=\max\big(f_1(x),f_2(x)\big)$, ha $0\leqq x\leqq 1$.

Az olvasó maga könnyen ellenőrizheti, hogy a felsorolt példák valóban hálók.

Tovább vizsgálva kiindulási példánkat, $\big(\mathbf{N},\ (\ \ ),\ [\ \ ]\ \big)$-t, észrevehetjük, hogy az 1 speciális tulajdonságú szám: bármely természetes számnak és 1-nek a legnagyobb közös osztója 1, azaz: $(n,1)=1$, amit a hálók nyelvén felírva:

VIa $\qquad$ x ∧ o= o.

Általában, ha egy hálóban van olyan o elem, hogy tetszőleges x H-beli elemre **VIa** fennáll, akkor a hálót *nullelemes*nek hívják. Ha van ilyen o, azt (vagy azokat) a háló *nullelem*ének mondják. Tehát $\big(\mathbf{N},\ (\ \ ),\ [\ \ ]\ \big)$ nullelemes háló, nulleleme az 1.

Lehet-e egy hálóban több különböző nullelem? Tegyük fel, hogy o_1 és o_2 nullelemek. Ekkor o_1-re és o_1-re teljesül **VIa**, azaz

$$o_2\wedge o_1=o_1\quad\text{és}\quad o_1\wedge o_2=o_2.$$

De **IIa** miatt $o_2\wedge o_1=o_1\wedge o_2$, így $o_1=o_2$, vagyis a két nullelem azonos. Tehát egy hálóban legfeljebb egy nullelem lehet.

Az eddigi axiómák és tulajdonságok olyan párokat alkottak, hogy egy-egy pár 2 tagja hasonló tulajdonságot mondott ki a $\wedge$,illetve $\vee$ műveletre. Ennek alapján felírhatjuk a **VIa** tulajdonság „párját”:

VIb $\qquad$ $x\vee e=e.$

Ha egy hálóban van olyan e elem, hogy tetszőleges x H-beli elemre **VIb** fennáll, akkor a hálót *egységelem*esnek hívják. Ha van ilyen e, azt (vagy azokat) a háló *egységelem*ének mondják. Könnyen látható, hogy a $\big(\mathbf{N},\ (\ \ ),\ [\ \ ]\ \big)$ hálóban nincs egységelem. – Ahogyan azt beláttuk, hogy egy hálóban legfeljebb egy nullelem van, ugyanúgy belátható, hogy egységelem is legfeljebb egy lehet.

A $(H,\wedge,\vee)$ háló *véges*, ha H véges sok elemből áll. Ha $(H,\wedge,\vee)$ egy véges háló, akkor van benne egységelem és nullelem is. Álljon ugyanis H az $x_1,\dots,x_n$ elemekből. Ekkor az **Ia**, **IIa**, **IIIa**, illetve **Ib**, **IIb**, **IIIb** axiómák felhasználásával belátható, hogy

$$\Big(\dots\big((x_1\wedge x_2)\wedge x_3\big)\wedge\dots\Big)\wedge x_n\ \text{nullelem,}$$

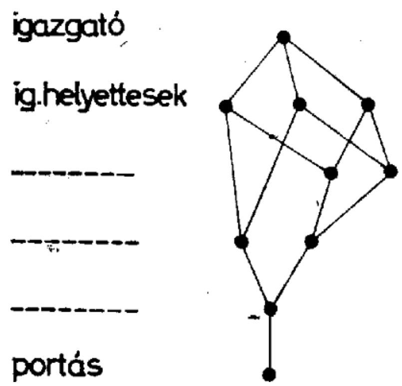
$$\Big(\dots\big((x_1\vee x_2)\vee x_3\big)\vee\dots\Big)\vee x_n\ \text{egységelem.}$$

Egy háló végessége tehát elégséges, de nem szükséges feltétel arra, hogy a hálóban legyen egységelem és nullelem.

Az itt felsorolt tulajdonságok mellett még nagyon sok minden mondható a hálókról. Mindenki maga is felfedezhet vagy gyárthat további hálókat, és azokat vizsgálva újabb tulajdonságokat bizonyíthat be. A hálókról további ismeretek és feladatok találhatók *Dr. Szász Gábor:* Hálóelmélet c. szakköri füzetében (Tankönyvkiadó, 1978).

Gyakorlásul szolgálhatnak a következő feladatok (megoldásuk a szerkesztőségbe küldhető, a legjobb megoldásokat jutalmazzuk):

1. A fenti 1–4. példák közül melyek *a)* disztributív, *b)* egységelemes, *c)* nullelemes, hálók?
2. Hogyan lehetne az $\big(\mathbf{N}, (\ \ ), [\ \ ]\big)$ hálót további elem (elemek) hozzávételével egységelemessé tenni?
3. Adjuk meg az összes, legfeljebb 4 elemű hálót.
4. Bizonyítsuk be, hogy ha e egységelem, o nullelem, akkor tetszőleges x elemre: $x \wedge e = x$, valamint $x \vee o = x$.
5. Az ábra egy hivatal felépítését szemlélteti: a pontok embereket jelölnek, a pontokat összekötő vonalak az emberek közötti „főnök–beosztott" viszonyt. Ha egy X pontból mindig lefelé haladó törött vonalon el lehet jutni az Y ponthoz, akkor Y az X-nek beosztottja és X az Y-nak főnöke.



Látjuk, hogy ennek a hivatalnak két tetszőleges dolgozója nem mindig van főnök–beosztott viszonyban, ilyenkor magasabb rangúnak mondjuk azt, akinek a pontja följebb levő sorban van. (Természetesen a főnök is magasabb rangú, mint a beosztottja.) A felrajzolt hivatal olyan, hogy bármely 2 ember közül vagy egyik beosztottja a másiknak, vagy pedig van legalább egy közös főnökük és legalább egy közös beosztottjuk, és közös főnökeik közt van pontosan egy legalacsonyabb rangú, illetve közös beosztottjaik közt van pontosan egy legmagasabb rangú. A közös főnökök közül a legalacsonyabb rangúnak a megkeresése kétváltozós művelet, úgyszintén a közös beosztottak közül a legmagasabb rangúnak a megkeresése is. (Ezekben a műveletekben egy embert önmaga főnökének tekintünk, egyben önmaga beosztottjának is.)

Mutassuk meg, hogy ezzel a két művelettel a hivatal felépítése hálót alkot, továbbá keressük meg az egységelemet és a nullelemet. Rajzoljuk fel különböző típusú hivatalok diagramját!

6. Az 5. feladat ábrájának mintájára rajzoljuk fel az $M = \{1, 2, 3\}$ halmaz részhalmazhálójának diagramját !