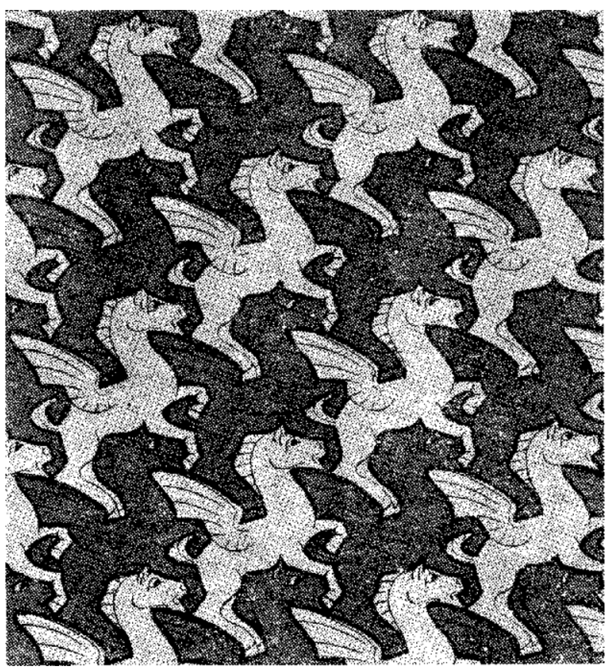
A holland Maurits Cornelis Escher (1898 – 1972) művészete megannyi talányt rejt magában. A Középiskolai Matematikai Lapok matematikus-grafikusművésznek nevezte az 1982. feladatban (50. kötet, 3. szám). Vajon tényleg matematikus volt? Igen is, meg nem is. Foglalkozása, végzettsége szempontjából semmiképpen (a hollandiai Haarlemben az Építészet és Díszítőművészet Főiskoláját végezte el). Grafikáit nézve sokan mégis „matematikusnak" tartják. Egyik kijelentése szerint a matematikusok közelebb állnak hozzá, mint a művészek. Sőt továbbmenve: a geometriai kristálytan egyik területén bizonyos értelemben „megelőzte" a tudósokat: a színes szimmetriák elméletének – a maga művészi módján – felfedezője, úttörője volt.

Escher „matematikai művészetének" alapja nem matematikai tanulmányai, hanem egy különös intuitív út. A kezdet talán a mór díszítőművészet tanulmányozása lehetett, amelynek geometrikus motívumai, absztrakt alakzatai, szimmetriái igen érdekesek. (Az iszlám vallás tiltja az alakos ábrázolást.) Escher Spanyolországban az Alhambra,[1] a cordobai mecset fal- és padlómintáiról sok vázlatot készített, majd „tovább játszott" a témával. Ismétlődő motívumnak már nem absztrakt alakzatokat, hanem hol Pegazusokat (a görög mitológiában a múzsák szárnyas lovai – lásd az 1. ábrát), hol lovasokat vagy bogarakat, máskor gyíkokat stb. választott. Ezek Eschernél hézagmentesen és egyrétűen illeszkednek és így (definíció szerint) mozaikot alkotnak. (H. S. M. Coxeter: A geometriák alapjai c. könyvében – Műszaki Könyvkiadó, 1973. 72 – 74. old. – röviden Escherrel is foglalkozik, és ott további két ilyen típusú rajz található. Ezek lényegében ugyanúgy ismétlődnek, ugyanolyan rendszer szerint illeszkednek egymáshoz, mint bizonyos kristályok (persze itt egy térbeli problémakör síkbeli analógjáról van szó). Ez az, ami miatt több matematikus, krisztallográfus (kristálytannal foglalkozó), fizikus, kémikus, geológus is felfigyelt a művészre. Escher sokat foglalkozott az ilyen „periodikus" rajzok módszeres kiszínezésével: az egybevágó figurákat meghatározott rend szerint különböző színűre festette. Különösen sok „fekete–fehér" rajzot készített (az 1. ábrán és Coxeter könyvében is ilyenek láthatók), de többszínűeket is. Ez a színezés a kristálytanban annak felelhet meg, hogy a formailag egybevágó kristály-poliédereknek eltérő fizikai tulajdonságai vannak. Különösen fontosak a fekete-fehér (kétszínű) rajzok, gondoljunk csak a kétféle mágneses pólusra, a kétféle elektronspinre (ún. paralel és antiparalel spinbeállást feltételezve). Eschert nem ezek a természettudományos szempontok vezették, hanem a művészi elképzelései, „játék" a formákkal és a színekkel. Így teremtette meg az ún. *színes szimmetriák* elméletének alapjait.[2]



1. ábra

Azok kedvéért, akik részletesebben érdeklődnek ez utóbbi témakör iránt, röviden elemezzük az 1. ábrát. Képzeletben tételezzük fel, hogy a minta az egész síkra kiterjed. Egyelőre tekintsünk el a szárnyas lovak kétféle színétől; mindegyiket gondoljuk pl. fehérnek. Általában egy minta szimmetriaoperációinak nevezzük azokat az egybevágósági transzformációkat, amelyek a mintát „önmagába" viszik, azaz esetünkben minden ló pontosan egy másik ló helyébe kerül. (Ugyancsak használatos erre a szimmetriaművelet, szimmetriaoperátor elnevezés is.) A helybenhagyást (identitást) is szimmetriaoperációnak tekintjük.

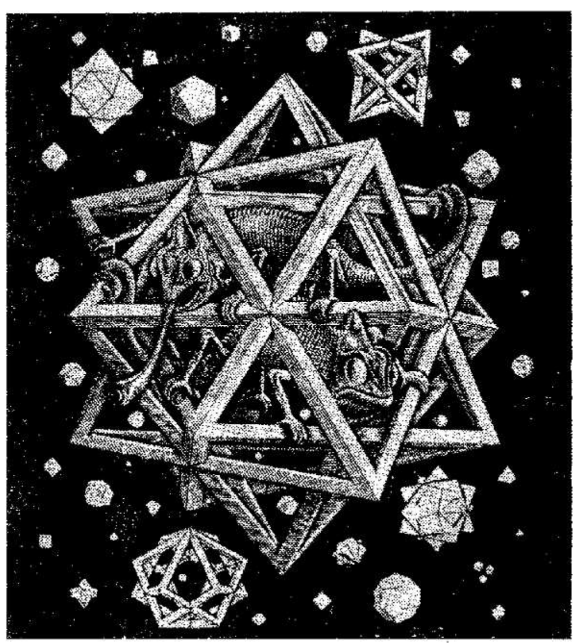
Könnyen belátható (tegyük ezt meg!), hogy a mostani mintánkhoz megadható egy $\mathbf{a}$ és egy $\mathbf{b}$ vektor a következőképpen: bármely ló átvihető bármely lóba oly módon, hogy közben az egész minta önmagába menjen át. Ez egy $n\mathbf{a}+m\mathbf{b}$ vektorral történő eltolás segítségével tehető meg, ahol n és m alkalmasan választott egész számok. Úgy is fogalmazhatunk, hogy esetünkben az összes szimmetriaoperáció megkapható az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ vektorral való eltolások megfelelő számú,

[1] Ezzel a két épülettel kapcsolatban l. pl. a „Műalkotások elemzése" c. IV. gimnazista tankönyv 262 – 263. oldalát.

[2] Az itt közölt reprodukciók a Kvant c. szovjet folyóiratból valók.

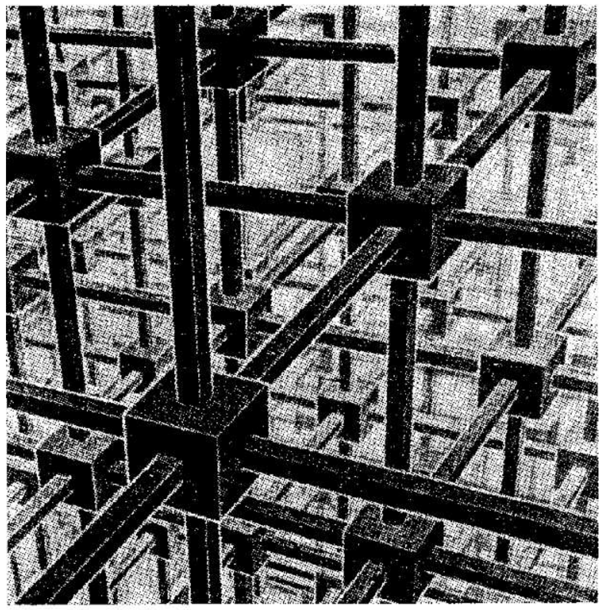
egymás utáni alkalmazásával ($n\mathbf{a}+m\mathbf{b}$ alakú eltolás). Szokás ilyenkor azt mondani, hogy az **a** és a **b** eltolás „generálja” valamennyi szimmetriaoperációt. Más, bonyolultabb szerkezetű minták szimmetriaoperációinak generálásához néha bizonyos forgatás, tükrözés, csúsztatva tükrözés – (egy egyenesre vonatkozó tükrözés és ugyanazon egyenes irányában végzett eltolás egymás utáni alkalmazása) – is szükséges lehet. Akik valamennyire jártasak a csoportelméletben, [3] beláthatják, hogy egy minta szimmetriaoperációi mindig csoportot alkotnak, az egység- vagy neutrális elem éppen az említett helybenhagyás. A szóban forgó „generálás” a csoport generálása. Az ismétlődések rendszere szempontjából lényegében 17 olyan különböző mintatípus létezik, amelyhez tartozó minták az egész síkra kiterjednek (ezek a kétdimenziós kristálytani vagy szimmetria-csoportok). Ezt először *J. Sz. Fjodorov* orosz krisztallográfus-matematikus bizonyította be 1891-ben, amit 1924-ben tőle függetlenül *P. Niggli* és a magyar származású *Pólya György* „újra” felfedezett. A térben már sokkal bonyolultabb a helyzet: 230 kristálytani tércsoport vagy Fjodorov-csoport van, amelyet szintén Fjodorov adott meg elsőnek. Tőle ugyancsak függetlenül, vele majdnem egyidőben *Schönfiess* német és *Barlow* angol tudósok is hasonló eredményre jutottak. Akik ezen problémakör iránt matematikusi (ill. fizikusi) szempontból érdeklődnek, Coxeter már említett könyvét, ill. *Ch. Kittel: Bevezetés a szilárdtestfizikába* (Műszaki Könyvkiadó, 1966) c. munkáját ajánljuk. A 17 síkbeli csoporttal kapcsolatosan érdekes anyag található *L. March–Ph. Steadman: Geometria az építészetben* c. könyvében (Műszaki Könyvkiadó, 1975), de a legjobban talán *Fejes Tóth László: Regular Figures* (Pergamon Press, 1964), ill. *Reguläre Figuren* (Akadémiai Kiadó, 1965) c. angolul és németül kiadott könyvéből lehet megérteni.

Térjünk vissza most az 1. ábrán látható mintára, de most már figyeljünk a színekre is. A korábban leírt szimmetriaoperációk között vannak olyanok, amelyek fehér lovat fehérbe, feketét feketébe visznek, mások viszont felcserélik ezeket. Ez utóbbi esetben fekete–fehér vagy antiszimmetria-operációkról beszélhetünk *A. V. Subnyikov*, $(1887-1970)$ szovjet krisztallográfus nyomán; ekkor a geometriai egybevágósági transzformáció még nem viszi önmagába a mintát, ahhoz még egy (nemgeometriai) színcserélési operációra is szükség van. Míg korábban (egyetlen szín esetén) 17 különböző mintatípus létezett, most már 46, sőt bizonyos elfajuló eseteket is figyelembe véve 80 fekete–fehér mintatípusról beszélhetünk (kétdimenziós fekete–fehér szimmetria csoport vagy Subnyikov-csoport, de használatos – éppen az említett fizikai kapcsolat miatt – a mágneses csoport elnevezés is). Természetesen annak nincs jelentősége, hogy fekete és fehér színekről beszéltünk, bármely két különböző szín megfelel, erre utal az ugyancsak használatos kétszínű vagy dikromatikus csoport elnevezés. A térben 230 helyett 1651 a megfelelő csoportok száma az elfajuló esetekkel együtt. Escher munkásságának egyik legnagyobb érdekessége, hogy az említett síkbeli fekete–fehér csoportok nagy részének mintáit szisztematikusan vizsgálta még a Subnyikov-féle tudományos megközelítés előtt.



2. ábra

[3] A csoport fogalmát jól megérthetjük pl. *Csákány Béla: Otto J. Smidt csoportelméleti problémája* c. cikkéből, KöMal 49. kötet 2. szám. (Éppen ebben a számban szerepelt az az Escher rajz, amelyhez az 1982. feladat kapcsolódik s amely a 2. ábránkon látható.) A Középiskolai Szakköri Füzetek Csoportelmélet című könyvecskéje (Tankönyvkiadó, 1974) kifejezetten a geometriai transzformációkból indul ki; így témánkhoz igen hasznos.



Kristályrács

Escher később egyre jobban vonzódott a matematikai és természettudományos témákhoz. Biztos szerepe volt ebben annak is, hogy több tudós (köztük pl. Coxeter) keresett vele kapcsolatot, matematikai és kristálytani kongresszusokra hívták meg kiállítani. Rajzain gömbök, spirálok, Möbius-szalagok tűnnek fel, máskor különös térszemlélete kelt meghökkenést. Így érthető, hogy több tudományos munkában is találkozhatunk Escher rajzaival. Sajnos, lapunk keretei nem teszik lehetővé, hogy több reprodukciót közöljünk, ezért felhívjuk a figyelmet néhány olyan hazai kiadványra, amelyből elég sok grafikájával ismerkedhetünk meg. A Természet Világa 1975. évi 9. számában jelent meg *Nagy Dénes: M. C. Escher „természettudományos” művészete* című cikke. (Ennek végén egy igen részletes irodalomjegyzék is szerepel.) A Galaktika 12. számát Escher-rajzokkal illusztrálták. *Székely Gábor: Matematika és művészet* (Delta, 1975. 6. szám) című munkájában néhány olyan Escher-vázlat látható, melyek a már említett Alhambrában készültek. Több, az utóbbi időben megjelent tudományos könyvben szerepel Escher egy vagy két rajza pl. *Ju. A. Grejder: Egyenlőség, hasonlóság, rendezés* (Gondolat, 1975. 153. old.), *E. H. Gombrich: Művészet és illúzió, A képi ábrázolás pszichológiája* (Gondolat, 1972. 224. old.), *R. L. Gregory: Az értelmes szem* (Gondolat, 1973. 51-52. old.).

Megjegyezzük, hogy a művész legismertebb albuma a The Grafic Work of M. C. Escher, mely több holland, angol, amerikai, német, francia kiadást ért meg. Külön érdekessége, hogy a művész minden rajzhoz rövid magyarázatot is fűz. Egy másik album a The World of M. C. Escher, ugyancsak többféle kiadásban jelent meg, s amelyben néhány rajz, vázlattanulmány is szerepel. Ebben található Eschernek és néhány tudósnak – köztük Coxeter-nek – a művésszel foglalkozó cikke is. A szimmetriák szempontjából azonban sokkal izgalmasabb C. H. MacGillavry krisztallográfus Symmetry Aspects of M. C. Escher's Periodic Drawings (a kiadó A. Oosthoek's Uitgeversmaatschappij NV, 1965) című könyve, Escher előszavával és 42 grafikájával. Ez a munka még külföldön is elég ritkaság, bizonyára segíti az elérhetőséget a közelmúltban megjelent 2. holland és a Fantasy and Symmetry címmel megjelent amerikai kiadás. Sajnos, hazánkban a most említett albumok és könyvek aránylag nehezen hozzáférhetők (a Kömal szerkesztősége sem rendelkezik velük).

Escher művészetének egy másik matematikai szempontból figyelemre méltó területe az „érdekes” poliéderek. Ide tartozik az a munka, amelyhez az 1982. feladat is kapcsolódik.

Nagy Dénes