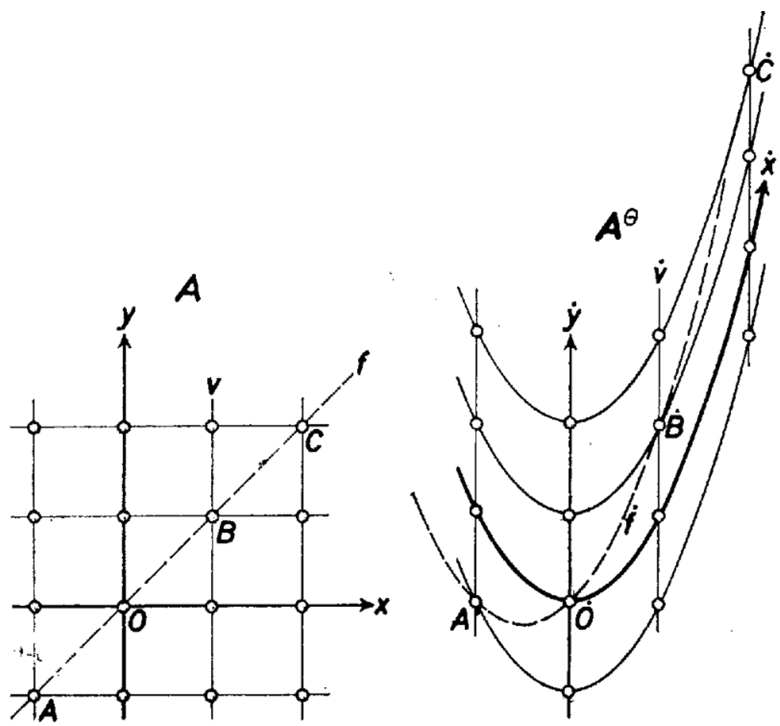
Feladatmegoldásban ügyes tanulók felkészültségének és képességének felmérésére először húsz évvel ezelőtt, és azóta is többször kitűztem azt a feladatot, amelyről ez a cikk szól. Nemcsak versenyre készülő középiskolásokat, hanem egyetemi hallgatókat is próbára tettem vele. Egyszer sem kaptam meg azt, amit vártam; általában hosszadalmas és nehézkes megoldásokat adtak még azok is, akik máskor kitűntek ötletességükkel. Éppen ezért úgy vélem, hogy a szükséges előismeretek, az egyszerű megoldás közlése, az alkalmazott módszer elemzése tanulságos lehet azok számára is, akik már sikeresen szerepeltek versenyeken.

A probléma. – Az euklideszi síkból egy jól meghatározott, új „sík"-nak nevezett alakzatot származtatunk.

Az euklideszi sík pontjait az új „sík"-on is pontoknak tekintjük. Az „egyenesek” szerepét azonban az euklideszi sík bizonyos parabolái és egyenesei játsszák. Olyan ez a „sík”, mint az euklideszi sík görbe tükörben mutatkozó képe; némelyik egyenes képe elgörbül. Most részletezzük, hogy az új „sík"-on mi játssza az „egyenes” szerepét. A síkbeli mozgások közül az eltolásra vonatkozó tudnivalók a következők: A sík önmagában való minden eltolásához egy-egy vektor, *eltolásvektor* tartozik. A sík minden pontjának kezdőhelyzete és eltolás utáni véghelyzete ugyanazt a vektort szolgáltatja, ez a szóban forgó eltolás eltolásvektora. A sík önmagában való eltolásai, mint elemek, egy halmazt alkotnak, ezt a halmazt Θ-val fogjuk jelölni, egy-egy elemét görög kisbetűvel (például $\tau \in \Theta$). A sík egy rögzített pontja legyen az O. A sík O kezdőpontú vektorai, mint elemek, egy $\mathbf{T}$ halmazt alkotnak. Ennek elemeit latin kisbetűkkel jelöljük (például $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$). A mondottak szerint Θ és $\mathbf{T}$ közt egy-egyértelmű megfeleltetés *(bijekció)* áll fenn, amit hiba volna azonosságnak tekinteni.



1. ábra

Legyen az euklideszi sík egy rögzített parabolája p, annak szimmetriatengelye az y egyenes. Egy τ eltolás vigye át a parabolát a p^τ parabolába, az y egyenest a vele párhuzamos y^τ egyenesbe.

Az új „sík"-on az „egyenesek"-et az ily módon származtatott p^τ és y^τ vonalak képviselik; míg a τ végigfut a Θ összes elemein, előállnak a „sík” „egyenesei”. Ezért fogjuk a Σ euklideszi síkból így származtatott síkot Σ^Θ-val jelölni. A Σ és Σ^Θ közti viszonyt az 1. ábra A és A^Θ része közti viszony érzékelteti.

Az euklideszi A ábrának az A^Θ ábra egy torzképe: mert bizonyos euklideszi viszonyok némelyikét a tükörkép eltorzítja. Például az A ábra A, O, B, C pontjai az f egyenesen vannak, az A^Θ ábrán az $\dot{A}$, $\dot{O}$, $\dot{B}$, $\dot{C}$ képpontok ugyancsak az $\dot{f}$ képegyenesen helyezkednek el. Ugyanakkor a v egyenes merőleges az x egyenesre, de a $\dot{v}$ képvonal nem merőleges az $\dot{x}$ képvonalra. Vagyis a kép az illeszkedést tükrözi, de a merőlegességet elrontja.

Most már megfogalmazhatjuk a bevezetésben említett feladatot:

1. Bizonyítandó, hogy a Σ^Θ egy affin sík.
2. Eldöntendő, hogy ezen az affin síkon érvényes-e a háromszögpárra vonatkozó Desargues-tétel.

A szükséges előismeretek. Először L. Euler $(1707-1783)$ kezdte vizsgálni más tulajdonságoktól elkülönítve az euklideszi sík olyan tulajdonságait, amelyek síknak síkra való párhuzamos vetítésével a vetületre is átöröklődnek. Ő nevezte el az ilyen tulajdonságokat *affin* tulajdonságoknak. Másfél évszázad múlva megújult a téma iránti érdeklődés (aminek egyik oka bizonyos fizikai problémák tisztázására törekvő kutatómunka volt); igyekeztek olyan egyszerű, de kellőképpen erős axiómarendszert találni, amelyből az affin sík tulajdonságait kifejező minden lényeges tétel levezethető. Így bontakozott ki az *affin sík* (affin geometria) mai fogalma.

Az affin sík egy nem üres ponthalmaz, amelyet bizonyos (egyeneseknek nevezett) részhalmazai által geometriai alakzattá szervezünk, mégpedig úgy, hogy teljesüljenek a következő axiómák:

$\mathbf{A}_1$: *A sík tetszőlegesen adott két (különböző) pontját egyaránt tartalmazó egyenes létezik, és csak egy ilyen egyenes van.*

$\mathbf{A}_2$: *Egy tetszőlegesen adott pontot tartalmazó egyenesek halmazában egyetlenegy olyan egyenes van, amely e pontot nem tartalmazó, különben tetszőleges egyenesnek semelyik pontját sem tartalmazza.*

$\mathbf{A}_3$: *Van olyan három pont, hogy azok mindegyikét semelyik egyenes sem tartalmazza.*

Ezekre az axiómákra röviden az összekötés, a párhuzamosság, a háromszög axiómája néven utalunk. Ezek az axiómák az euklideszi sík néhány szemléletesen nyilvánvaló tulajdonságát fejezik ki a halmazok elvont nyelvén. Ezért világos, hogy e három axiómából álló axiómarendszer nem „üres” definíció, de majd meglátjuk, hogy nemcsak az euklideszi síkot jellemzi. *Affin sík* minden olyan szervezett ponthalmaz, amelyre nézve ez az axiómarendszer teljesül.

A Descartes-féle koordináta-geometria módszere lehetővé tette az euklideszi geometria leírását algebrai módszerekkel. Hajlékony eszközzé vált a geometriai problémák megoldásában. Természetesnek látszik az a törekvés, hogy az $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$ axiómákkal definiált síkon is valami hasonló módszert találjunk. Tudjuk azonban, hogy a Descartes-féle koordinátafogalom az euklideszi geometria olyan fogalmaira épül (például a távolság és a merőlegesség), amelyeknek az affin síkon nincs értelme. Mégis sikerült a koordinátafogalmat úgy általánosítani, hogy az már az affin síkon is értelmezhető, vagyis az euklideszi metrikától független. Ebben az új fogalomalkotásban döntő szerephez jut *G. Desargues* (1593 – 1662) egy régen ismert tétele. Ez a tétel az affin síkra nézve a következőképpen fogalmazható:

Legyen a sík hat, páronként különböző pontja A, B, C; $\dot{A}$, $\dot{B}$, $\dot{C}$, mégpedig olyan helyzetben, hogy se az első három, se az utolsó három ne essék egy egyenesbe. Ezekre vonatkozik a szóban forgó (röviden) **D**-tétel:

Az $A\dot{A}$, $B\dot{B}$, $C\dot{C}$ egyenesek akkor és csak akkor találkoznak egy pontban, vagy párhuzamosak, ha

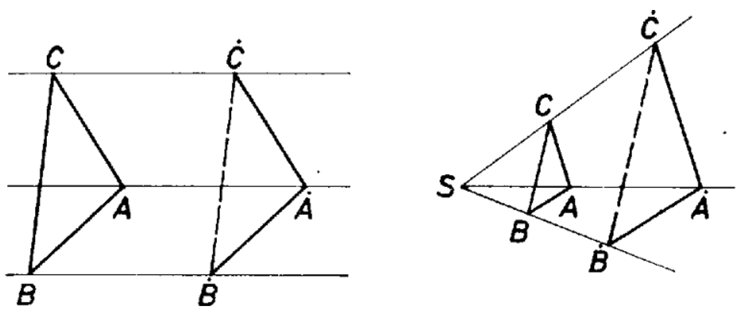
(i) *az $AB \cap \dot{A}\dot{B} = \ddot{C}$, $BC \cap \dot{B}\dot{C} = \ddot{A}$, $CA \cap \dot{C}\dot{A} = \ddot{B}$ metszéspontok egy egyenesen vannak; vagy*

(ii) *a három egyenespár közül az egyiknek az egyenesei párhuzamosak a másik kettővel meghatározott metszéspontokat összekötő egyenessel; vagy*

(iii) *mind a három párt párhuzamos egyenesek alkotják, vagyis $AB \parallel \dot{A}\dot{B}$, $BC \parallel \dot{B}\dot{C}$, $CA \parallel \dot{C}\dot{A}$.*

D. Hilbert (1862 – 1943) észrevette és bebizonyította, hogy az új koordinátaforgalom a **D**-tétel egy gyöngébb változatára is felépíthető. Ezt a tételt $\mathbf{D}^*$-gal jelöljük:

Ha az ABC és $\dot{A}\dot{B}\dot{C}$ háromszög helyzete olyan, hogy az $A\dot{A}$, $B\dot{B}$, $C\dot{C}$ egyenesek egy S pontban találkoznak, vagy párhuzamosak, továbbá ha $AB \parallel \dot{A}\dot{B}$ és $AC \parallel \dot{A}\dot{C}$, akkor $BC \parallel \dot{B}\dot{C}$ (Ezt szemlélteti a 2. ábra jobb és bal oldali képe.)



2. ábra

Ebből a gyönge $\mathbf{D}^*$-tételből a **D**-tétel levezethető. Felvetődik a kérdés, hogy az affin síkot definiáló axiómarendszerből levezethető-e a $\mathbf{D}^*$-tétel. Hilbert bebizonyította, hogy nem vezethető le, mert van olyan affin sík, amelyen a $\mathbf{D}^*$-tétel nem érvényes. Később Hilbert bizonyítását többen is egyszerűsítették, és F. R. Moulton 1902-ben egy zseniálisan egyszerű bizonyítást közölt.

Érthető, hogy ezek után további axiómával bővítették az affin síkot definiáló axiómarendszert, avégett, hogy a síkon a koordináták bevezetése lehetővé váljék. Ez a további axióma a következő:

$\mathbf{A}_4$: *A síkon érvényes a $\mathbf{D}^*$-tétel.*

Az $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_4$ axiómarendszerrel definiált speciális affin síkot *Desargues-féle affin síknak* nevezzük.

A geometria tanításának középiskolai programjában szerepel ugyan a geometriai transzformációkat alkalmazó gondolkodásmód kialakítása és fejlesztése, azonban az e célra szolgáló ismeretanyag nagyon szegény, a gondolkodás fejlesztésére szánt témák alacsony színvonalúak és érdektelenek. Még a lineáris transzformációk közül is csak a legspeciálisabbak szerepelnek, sőt azok is csak hiányos, széteső feldolgozásban.

A transzformációra támaszkodó gondolkodásmód erejének érzékeltetése céljára a következőkben egy egyszerű, nemlineáris transzformációt ismertetünk.

Legyen az euklideszi síkon egy rögzített Descartes-féle koordináta-rendszerünk. Arra vonatkoztatva tekintsünk egy $(x,\, y)$ tárgypontot és egy ϱ transzformáció szerint e ponthoz rendelt $(\dot{x},\, \dot{y})$ képpontot. Most a ϱ transzformációt a

$$\dot{x} = x,\qquad \dot{y} = x^2 + y \tag{1}$$

utasítással definiáljuk. Az (1)-ből világos, hogy a sík minden pontjának van képe, mégpedig egy pontnak egy képe van. Az (1)-ből könnyen következik

$$x = \dot{x},\qquad y = -\dot{x}^2 + \dot{y}, \tag{2}$$

amiből pedig az világos, hogy a sík bármely $(\dot{x},\, \dot{y})$ pontja képpontnak tekinthető, mert van őse, mégpedig egy, az $(x,\, y)$ tárgypont. Az ilyen tulajdonságú transzformációt *bijektív*nek mondjuk.

Most egy látszólag hasonló példát tekintünk, az

$$\dot{x}^2 = x^2 + y^2,\qquad \dot{y} = xy \tag{3}$$

utasítással definiált σ transzformációt. Ez egyrészt olyan, mint a ϱ, mert σ szerint is az euklideszi sík minden pontjának van képe, mégpedig egy pontnak egy képe van. Másrészt azonban nem olyan, mert nem igaz, hogy minden pont képpontnak tekinthető. Például a $(-1,\, -1)$ pont semelyik pontnak sem képe. Az sem igaz, hogy ha egy pontnak van őse, akkor csak egy őse van. Például a $(25,\, 12)$ pontnak 4 őse van: $(3,\, 4)$, $(4,\, 3)$, $(-3,\, -4)$, $(-4,\, -3)$. A σ tehát nem bijektív transzformáció.

A ϱ és σ transzformáció közti különbség – vagyis az, hogy a ϱ egy-egyértelmű, míg a σ csupán egyértelmű – abból ered, hogy az őket definiáló algebrai utasítás alkata más. A σ esetében a képpont koordinátái a tárgypont koordinátáinak racionális függvényei. Az ilyen transzformációt *racionális transzformáció*nak nevezzük. A ϱ esetében az is igaz, hogy a tárgypont koordinátái a képpont koordinátáinak racionális függvényei, ami pedig a σ esetében nem igaz. Ezért a ϱ-t *biracionális transzformáció*nak nevezzük.

A biracionális transzformációk elmélete az ún. *algebrai geometria* egy gazdag és fontos fejezete. Ezt az elméletet (1863-ban) L. Cremona dolgozta ki, ezért nevezik a biracionális transzformációt Cremona-féle transzformációnak is.

Most megvizsgáljuk, hogy milyen hatással van a ϱ transzformáció a sík egyeneseire. A transzformációra nézve *fixpont* az olyan pont, amely a képével egybeesik. Könnyű belátni, hogy az y-tengely minden pontja fixpont, és más fixpont nincs. Ebben az értelemben mondhatjuk, hogy ennek az egyenesnek a képe önmaga. Hasonlóképpen az y-tengellyel párhuzamos bármely egyenesnek a képe önmaga, mert a ϱ transzformáció az egyenesen levő pont első koordinátáját nem változtatja meg. Ha azonban $x \neq 0$, akkor az y-tengellyel párhuzamos egyenesen levő bármely pontnak a második koordinátáját megváltoztatja; tehát az ilyen egyenesnek ugyan önmaga a képe, de nincs egy fixpontja sem. Az egyenest a transzformációra nézve invariáns egyenesnek mondjuk, hogyha a képével egybeesik.

A sík többi l egyenesének az egyenlete

$$y = mx + h$$

alakú. Az ilyen egyenes pontjainak megfelelő képpontok alkotják az egyenes képét. A képvonal egyenletét az l egyenes egyenletéből a (2) szerint kifejezett x és y behelyettesítésével kapjuk:

$$\dot{y} = \dot{x}^2 + m\dot{x} + h. \tag{4}$$

Ez pedig egy olyan parabolának az egyenlete, amely az $y = x^2$ egyenletű parabolából egy alkalmas τ eltolással származtatható.

Az a τ eltolás ugyanis, amely a $(0,\, 0)$ pontot a $\left(-\dfrac{m}{2},\, -\dfrac{m^2}{4} + h\right)$ pontba viszi át, az

$$\dot{x} = x - \frac{m}{2},\qquad \dot{y} = y - \frac{m^2}{4} + h$$

utasítással fejezhető ki. Az $y = x^2$ egyenletű parabola pontjainak a τ szerinti képpontjai valóban az

$$\dot{y} + \frac{m^2}{4} - h = \left(\dot{x} + \frac{m}{2}\right)^2,$$

vagyis

$$\dot{y} = \dot{x}^2 + m\dot{x} + h$$

egyenletű parabola pontjait szolgáltatják.

A ϱ transzformáció alkalmazása. Vegyük észre, hogy a ϱ transzformációról eddig tárgyalt tudnivalókkal megközelítettük e cikk magvát képező problémát: a Σ^{Θ} affin tulajdonságainak a megállapítását és igazolását. Hiszen az „egyeneseket" realizáló vonalakat – egyeneseket és parabolákat – az euklideszi sík egyeneseiből egy-egyértelműen származtathatjuk a ϱ transzformáció segítségével. Az a tény, hogy *a Σ pontalakzat és a Σ^{Θ} pontalakzat között létesített bijekció, a ϱ transzformáció, az egyenesek és „egyenesek" között is bijekciót indukál*, fontos és szerencsés eredménynek mondható.

Egy további fontos tény az, hogy a ϱ transzformáció a tárgyalakzaton fennálló relációk némelyikét a képalakzatra átörökíti. Az ilyeneket a transzformációra nézve *invariáns* relációknak nevezzük. A legfontosabbat az előző tárgyalás során már láttuk: *az illeszkedés a ϱ-ra nézve invariáns*. Ez azt jelenti, hogy *egy képpont akkor és csak akkor van rajta egy képvonalon, ha a képpont őse rajta van a képvonal ősén.* Az $(\dot{x},\,\dot{y})$ képpont ugyanis akkor van rajta a képvonalon, ha igaz az $\dot{y}=\dot{x}^2+m\dot{x}+h$ egyenlőség. Ebből pedig az (1) szerint $x^2+y=\dot{x}^2+m\dot{x}+h$, vagyis $y=mx+h$ következik, ami azt jelenti, hogy a képpont őse, az $(x,\,y)$ pont rajta van a képvonal ősén, az $y=mx+h$ egyenesen. Azt pedig, hogy az $(x,\,y)$ pont $y=mx+h$ egyenesen való elhelyezkedéséből a képpont képegyenesre való illeszkedése következik, már (4) levezetésével elintéztük. Ugyanez a két állítás az y-tengellyel párhuzamos egyenesek esetében nyilvánvalóan igaz.

Az illeszkedés invariáns voltából következik, hogy a *párhuzamosság is invariáns reláció.* Persze definiálni kell a vonalak párhuzamosságát, mégpedig úgy, hogy az az egyenesek párhuzamosságára már elfogadott definícióval megegyezzék: *két vonal párhuzamos, ha nincs közös pontjuk.* Legyen f, g két egyenes és $\dot{f}$, $\dot{g}$ a ϱ transzformációval előállított képük. Ha $f\parallel g$, de $\dot{f}$ és $\dot{g}$ egy közös $\dot{S}$ ponttal rendelkezne, akkor az $\dot{S}$ őse, az S pont – az illeszkedés invariáns voltának következtében – mind az f, mind a g egyenesen rajta volna, tehát $f\parallel g$

Az invariánsokról szóló két tételünket a következő rövid alakban írhatjuk:

(i) $P\in f\Leftrightarrow \dot{P}\in\dot{f}$,

(ii) $f\parallel g\Leftrightarrow \dot{f}\parallel\dot{g}$.

Tekintsük most újra az affin síkot definiáló A_1, A_2, A_3 és A_4 axiómákat. Lényegében véve mindegyik illeszkedésre, párhuzamosságra vonatkozó állítás. Minthogy pedig ezek a relációk a ϱ transzformációra nézve invariánsak, azért a Σ-ra érvényes axióma érvényes a Σ-ból ϱ által származtatható Σ^{Θ}-ra is. Ezzel tehát bebizonyítottuk, hogy a Σ^{Θ} *alakzat egy Desargues-féle affin sík.*

Ennek az egyszerű bizonyításnak a lényege a következő három észrevétel:

A Σ^{Θ} alakzat az euklideszi síkból a ϱ biracionális transzformációval származtatható.

Az axiómák illeszkedésre és párhuzamosságra vonatkozó állítások. Az illeszkedés és a párhuzamosság a ϱ-ra nézve invariáns.

A szóban forgó probléma különféle megoldásainak összehasonlító elemzése érzékeltethetné a ϱ transzformációval okoskodó eljárás erejét, előnyét. E helyett a próbára tett tanulók és egyetemi hallgatók dolgozatait elemezzük. Ebből kiderül, hogy a megoldást produkáló résztvevők miért tartották az A_4 axiómára vonatkozó kérdés tisztázását „különösen nehéznek".

A megoldók dolgozatainak elemzése. Minthogy más módszert nem ismertek, az analitikus geometria kezdetleges módszereit alkalmazták. A geometriai állításokat lefordították a koordináta-geometria nyelvére, azután képletről képletre való következtetés útján, ami szétágazó esetek végiggondolását követelte, haladtak a bizonyítandó állítást kifejező képlet felé. Itt az általuk produkált megoldás gondolatmenetét csak röviden vázoljuk.

Először azt állapították meg, hogy a Σ^{Θ} alakzat „egyenesét" ábrázoló egyenesnek vagy parabolának az egyenlete

$$x=a,\quad \text{illetőleg}\quad y=x^2+bx+c$$

alakú. Két ilyen egyenesnek nincs közös pontja. Egy ilyen egyenesnek és parabolának mindig van, de csak egy közös pontja. Két ilyen,

$$y=x^2+b_1x+c_1,\quad y=x^2+b_2x+c_2\quad (c_1\neq c_2)$$

egyenletű parabolának aszerint, hogy $b_1\neq b_2$ vagy $b_1=b_2$, egyetlenegy közös pontja van vagy egy sincs. Az utóbbi esetben a két parabola bármelyikét szimmetriatengelye mentén eltolhatjuk a másik parabolába; ebben az esetben mondjuk, hogy *a két parabola párhuzamos egymással.*

Ez után három aritmetikai állítást igazoltak.

1) Ha $x_1\neq x_2$, akkor az $y_1=x_1^2+bx_1+c$, és az $y_2=x_2^2+bx_2+c$, b, c-ben elsőfokú egyenletnek (b,c)-re egy és csak egy megoldása van.

2) Ha b, x_0, y_0 tetszőlegesen adott számok, akkor az $y_0=x_0^2+bx_0+c$ egyenlőségnek egy és csakis egy c szám tesz eleget.

3) A másodfokú

$$y=x^2,\quad y=x^2-2x,\quad y=x^2-4x+4$$

egyenletek páronként a $(0,\,0)$, $(2,\,0)$, $(1,\,1)$ számpárokat határozzák meg.

Az pedig, hogy a Σ^{Θ} alakzaton $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$ teljesül, rendre az 1), 2), 3) következménye. Ebben a gondolatmenetben szokatlanul nagy munkát követel az $\mathbf{A}_4$ igazolása. A sikeresen dolgozó diákok egyöntetűen kijelentették: „nagyon nehéz". Az $\mathbf{A}_4$ állításának a koordináták nyelvén való kifejezése szövevényes, a vele való okoskodást a bonyolult képletből bonyolult képletre vezető következtetés megnyújtja. Ezt még tetézi az a kombinációs szerteágazás, ami abból ered, hogy a 2. ábrán szereplő egyeneseket a Σ^{Θ} alakzaton egyenesek is, meg parabolák is képviselhetik. A lehetséges kombinációk végiggondolása tovább növelte a bizonyítás terjedelmét. Ez a megoldásra vállalkozó diákok többségét visszariasztotta, a $\mathbf{A}_4$ érvényességét végül is nem bizonyították.