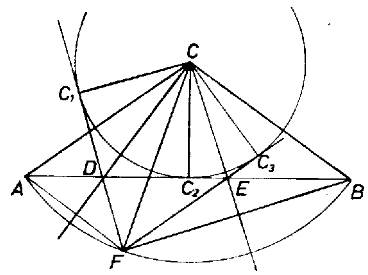
I. megoldás. a) Tekintsük először azt az egyszerű, különleges esetet, ha az F találkozási pont éppen az ABC háromszög síkjában – más néven: a DEC háromszög síkjában – jön létre, ekkor ugyanis a bizonyítás síkmértani feladattá egyszerűsödik. Ekkor mindkét háromszöget $180°$-kal fordítottuk el a találkozásig. Föltevésünk azt jelenti másképpen, hogy C benne van a DEF síkban, tehát vetülete – amit vizsgálnunk kell – önmaga (1. ábra).



1. ábra

Mivel a háromszög oldalait érintő körök mindegyikének középpontján átmegy a háromszög mindegyik szögének vagy a mellékszögének a felezője, azért elég azt belátnunk az állítás bizonyítására, hogy a DEF háromszög D-beli és E-beli külső szögeinek felezői – vagy hogy ezek egyike és az F-beli belső szögfelező – C-ben metszik egymást, hiszen két szögfelező metszéspontja egyenlő távolságra van mind a három oldal egyenesétől, átmegy rajta a harmadik felező is.

C-nek a DF egyenesen levő C_1 vetülete a DF oldal D-n túli meghosszabbításán van, mert a CDF szög mint a CDA szög új helyzete tompaszög, hiszen $AD < DB$ alapján D az AC_2 szakaszon van, ahol C_2 az AB alap felezőpontja, egyszersmind C vetülete a DE egyenesen. Levonva e két szögből az EDF, illetve C_1DA szöget, amelyek egymásnak csúcsszögei, egyenlők a maradó CDE és CDC_1 szögek is, eszerint a DC félegyenes valóban felezi az EDC_1 külső szöget.

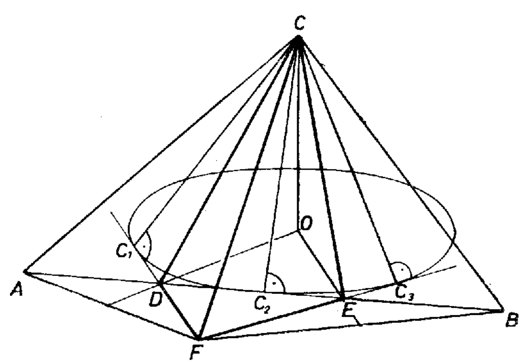
Átadva A itteni szerepét B-nek, D-ét pedig E-nek, kapjuk, hogy EC felezi a DEF szög külső (mellék-) szögeit, tehát C valóban középpontja a mondott külső érintő körnek.

(Feltűnőbben használjuk ki a $CA = CB$ egyenlőséget, ami az F pont létrejöttének szükséges föltétele, a következő egyenlőségláncolatban:

$$CFD\sphericalangle = CAD\sphericalangle = CAB\sphericalangle = CBA\sphericalangle = CBE\sphericalangle = CFE\sphericalangle,$$

tehát FC felezi a DFE belső szögét a DEF háromszögnek.)

b) A már elintézett esetet kizárva, F két helyzetben adódik – a háromszögeket a vízszintesnek gondolt ABC sík fölé, illetve alá fordítva. Mivel azonban az így létrejött két alakzat egymás tükörképe az ABC síkra nézve, elég a sík egyik oldalán létrejött F helyzettel foglalkoznunk. Könnyebb elképzelés érdekében úgy fordítjuk el alakzatunkat az AB egyenes mint tengely körül, hogy a DEF sík álljon vízszintesen (2. ábra).



2. ábra

Körünk O középpontját ismét az EDC_1 és DEC_3 külső szögeket felező egyenesek metszéspontjaként tekintjük előállítva, ahol C_3 a C vetülete az EF egyenesen. A DO egyenes felezi a szög ADF csúcsszögtartományát is, így pedig egyben magasságvonala is az AFD háromszögnek, hiszen ez egyenlő szárú, alakzatunk előállításánál fogva: $DF = DA$. Ugyancsak az előállításnál fogva $CF = CA$. Ezek szerint O, D és C az AF szakasz felező merőleges síkjának pontjai, és ez a sík merőleges az AF-et tartalmazó DEF síkra.

Meggondolásunkban D és A (és C_1) szerepét rendre E-nek, B-nek (C_3-nak) átadva, O, E és C a BF szakasz felezőmerőleges síkjának pontjai, és e sík szintén merőleges a DEF síkra. Ennélfogva a két felező merőleges sík OC metszésvonala is merőleges a DEF síkra, tehát O a C-nek e síkon levő merőleges vetülete. Ezzel az állítást bebizonyítottuk. (Kihasználtuk azt is, hogy a két sík különböző, mert D és E különbözők, és O nincs rajta DE-n, így tehát OC-re a DEF síkban két különböző, rá merőleges egyenest találtunk: OD-t és OE-t.)

A feladat szövegének harmadik mondatában szereplő „találkozott” igealakot úgy értelmezzük, hogy a DEF háromszög létrejött; emiatt nem diszkutáltuk a D és E megválasztási lehetőségei és F létrejötte közti kapcsolatot.

Megjegyzések. 1. Könnyű látni, hogy az a) esetben az ACD és BCE szögek összege éppen egyenlő a DCE szöggel, a b) esetben pedig nagyobb nála; ekkor létrejön a C csúcsú $CDEF$ testszöglet (triéder). Az

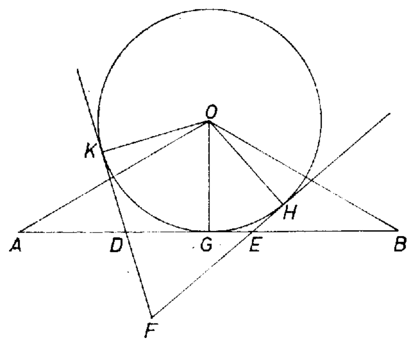
$$ACD\sphericalangle + BCE\sphericalangle > DCE\sphericalangle$$

feltétel a feladat eredeti, $AD < DB$, $AE > EB$ feltételeivel együtt elegendő is a triéder létrejöttéhez, hiszen így

$$ACD\sphericalangle < DCE\sphericalangle + BCE\sphericalangle \quad \text{és} \quad BCE\sphericalangle < DCE\sphericalangle + ACD\sphericalangle.$$

2. O-nak a DEF háromszög belsejéhez képest elfoglalt helyzetéből némi (egyenlőtlenséges) következtetést vonhatunk le a $CDEF$ gúlában a DEF alaplap és a C-ben összefutó oldallapok közti lapszögekre vonatkozóan: az FD, FE alapélű oldallapok hegyesszöget alkotnak az alaplappal, a DE élnél viszont tompaszög van. Az utóbbi abból is adódik, hogy a CA, CB éleknek CF-fé egyesítése után F-nek az ABC háromszög síkján levő vetülete az AB-nek C-t nem tartalmazó oldalára esik.

II. megoldás. Jelöljük a kérdéses külső érintő körnek a DE, EF, FD egyenesen levő érintési pontját – más szóval O-nak az egymás utáni egyenesekre való vetületeit – rendre G, H, K betűvel.



3. ábra

A körhöz a D és E pontokból húzott érintőszakaszok egyenlősége alapján (3. ábra):

$$FK = FD + DK = FD + DG = AD + DG = AG,$$
$$FH = FE + EH = FE + EG = BE + EG = BG,$$

és mivel még $FK = FH$ is áll, azért $AG = BG$. Eszerint G az AB szakasz felezőpontja, ami egyszersmind C-nek az AB, azaz DE egyenesen levő vetülete. S mivel így GC is, GO is merőleges AB-re, azért a COG sík is merőleges rá, ennélfogva a DEF síkra is.

Amikor a CAD háromszöget a CFD helyzetbe elfordítjuk, fordítsuk vele síkjának G pontját is, vagyis a CAG háromszöget. Így $DG = DK$ alapján G a K-ba jut, CG a CK-ba, és az előbbihez hasonlóan a COK sík is merőleges a DEF síkra. Ekkor pedig ugyanez áll CO metszésvonalukra is, tehát O valóban vetülete a C-nek a DEF síkon, ezt kellett bizonyítanunk.