1. feladat. *Az m és n természetes számokra $n > m > 1$. Az 1978^m, valamint 1978^n tízes számrendszerbeli alakjában az utolsó három jegy sorrendben is megegyezik. Keressük meg azt az m-et és n-et, amelyre $m + n$ a lehető legkisebb!* (Kuba, 6 pont)

Megoldás. A feltétel akkor és csak akkor teljesül, ha

$$1978^n - 1978^m = 1978^m(1978^{n-m} - 1) \tag{*}$$

osztható 1000-rel, azaz ha osztható külön-külön 8-cal és 125-tel is. Az $n > m$ feltétel miatt (*) jobb oldalán a második tényező páratlan, és így 8-cal akkor és csak akkor osztható, ha $m \geq 3$.

A 125-tel való oszthatósághoz vizsgáljuk először 1978^a utolsó jegyét $a = 1, 2, \ldots$ értékekre. Ezek rendre $8, 4, 2, 6, 8, 4, 2, 6, \ldots$ azaz négyes periódust alkotnak. Így $1978^a - 1$ akkor és csak akkor osztható 5-tel, ha a osztható 4-gyel. Az $1978^{4b} = \ldots 256^b$ utolsó két számjegye ötös periódust alkot: 56, 36, 16, 96, 76, 56, 36, … tehát $1978^{4b} - 1$ pontosan akkor osztható 25-tel, ha b többszöröse 5-nek. Végül $1978^{20c} = \ldots 256^{5c} = \ldots 776^c$ utolsó három jegyét vizsgálva először $c = 5$ esetén kapunk 125-tel osztható végződést.

Ez azt jelenti, hogy ha $1978^{n-m} - 1$ osztható 125-tel, akkor $n - m$ értékének legalább 100-nak kell lennie. Ezt az előző $m \geq 3$ feltétellel összevetve azonnal látható, hogy a keresett értékek $m = 3$ és $n = 103$.

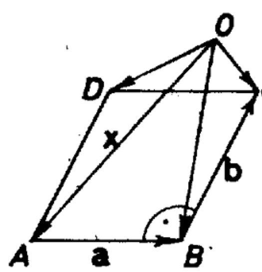
Megjegyzés. A feladat megoldásához felhasználhatjuk az ún. Euler-tételt: ha a és k relatív prímek, és $\varphi(k)$-val jelöljük a k-nál kisebb, k-hoz relatív prím egészek számát, akkor $a^{\varphi(k)} - 1$ osztható k-val. (Lásd például Molnár Emil: Matematikai versenyfeladatok, 488. oldal.) Mivel $\varphi(125) = 100$ és 1978 és 125 relatív prímek, azért $1978^{100} - 1$ osztható 125-tel. Ez azonban nem jelenti azt, hogy 100 a *legkisebb* ilyen kitevő, noha a feladat éppen a legkisebbet kérdezte.

2. feladat. *Egy gömb belsejében adott egy P pont. A gömb felszínén úgy helyezkednek el az A, B, C pontok, hogy PA, PB és PC páronként merőlegesek egymásra. Legyen a PA, PB és PC által meghatározott téglának P-vel szemközti csúcsa Q. Mi a Q pontok mértani helye?* (USA, 7 pont.)

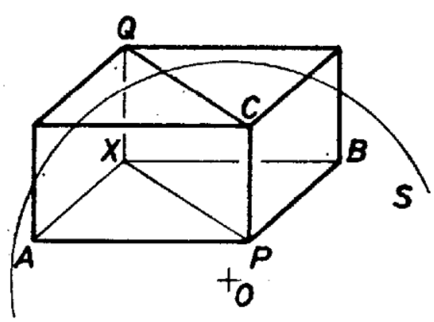
Megoldás. Először egy könnyen igazolható segédtételt mondunk ki: minden $ABCD$ téglalapra és minden (nem feltétlenül a téglalap síkjában lévő) O pontra $OA^2 + OC^2 = OB^2 + OD^2$. Legyen ugyanis $\overrightarrow{AB} = a$, $\overrightarrow{BC} = b$, $\overrightarrow{OA} = x$ (a*1. ábra*), ekkor $ab = 0$, hiszen a és b merőlegesek. A bizonyítandó állítás pedig az

$$\mathbf{x}^2 + (\mathbf{x} + \mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = (\mathbf{x} + \mathbf{a})^2 + (\mathbf{x} + \mathbf{b})^2$$

azonosság átírása.



1. ábra



2. ábra

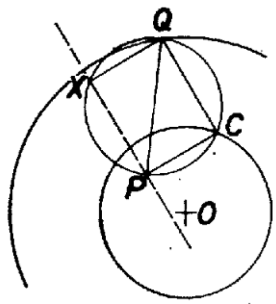
Térjünk rá a feladatra. Legyen az adott S gömb középpontja O, sugara r, az $APBX$ téglalap negyedik csúcsa X (*2. ábra*). A segédtételt az $APBX$, valamint $PXQC$ téglalapokra alkalmazva kapjuk, hogy

$$OP^2 + OX^2 = OA^2 + OB^2, \qquad OP^2 + OQ^2 = OX^2 + OC^2,$$

ahonnan

$$OQ^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 - 2OP^2 = 3r^2 - 2OP^2 = \text{állandó},$$

azaz a Q pont rajta van az O középpontú, $r_1 = \sqrt{3r^2 - 2OP^2} > r$ sugarú S_1 gömbön.



3. ábra

Megmutatjuk, hogy az S_1 gömb minden Q pontja hozzátartozik a mértani helyhez. Tekintsük ugyanis az S gömb és a PQ átmérőjű gömb metszésvonalát. Ennek az OPQ síkba eső egyik pontja legyen C és QCP-t téglalappá kiegészítő negyedik pont X (*3. ábra*). A segédtétel szerint $OX^2 = OQ^2 + OP^2 - OC^2 = 2r^2 - OP^2 > r^2$, azaz az X pont kívül van az S gömbön. Így az XP átmérőjű gömbnek valamint az S gömbnek a P-ben CP-re emelt merőleges síkban van két közös pontja: az egyik legyen B, az XBP-t téglalappá kiegészítő negyedik csúcs A. Az AP, BP, CP szakaszok páronként merőlegesek, az általuk meghatározott tégla negyedik csúcsa Q, továbbá B és C az S gömbön van. Elegendő tehát megmutatnunk, hogy A is S-en van. Ez viszont az

$$OA^2 = OX^2 + OP^2 - OB^2 = (2r^2 - OP^2) + OP^2 - OB^2 = r^2$$

összefüggésből következik.

Megjegyzés. Ha nem azt követeljük meg, hogy A, B és C egy gömb felszínén legyenek, hanem hogy rendre három egymással koncentrikus gömb felszínén, a mértani hely továbbra is egy gömb felülete. A feladat tetszőleges dimenziójú gömbökre, például síkra is általánosítható.

3. feladat. *A pozitív egész számok halmaza megegyezik az*

$$\{f(1),\ f(2),\ \ldots,\ f(n),\ \ldots\} \quad \textit{és a} \quad \{g(1),\ g(2),\ \ldots,\ g(n),\ \ldots\}$$

diszjunkt halmazok egyesítésével, ahol

$$f(1) < f(2) < \ldots < f(n) < \ldots,$$
$$g(1) < g(2) < \ldots < g(n) < \ldots,$$

és $\quad g(n) = f\big(f(n)\big) + 1$ *minden* $n \geq 1-re.$

Határozzuk meg $f(240)$ értékét! (Nagy-Britannia, 8 pont)

I. megoldás. Tekintsük az 1 és $g(n)$ közti egész számokat. Ezek mindegyike vagy f-nek vagy g-nek valamilyen helyen felvett értékeként adódik ki. Mégpedig g értékeként n szám, $g(1)$, $g(2)$, $\ldots$, $g(n)$; a $g(n)-1 = f\big(f(n)\big)$ alapján f értékeként $f(n)$ szám, $f(1)$, $f(2)$, $\ldots$, $f(n)$. Ezzel minden 1 és $g(n)$ közti számot pontosan egyszer kapunk meg, tehát

(*) $$g(n) = f(n) + n$$

Ebből adódik, hogy $f(1) = 1$ (hiszen vagy $f(1)$-nek vagy $g(1)$-nek kell 1-nek lennie és $g(1) = f(1) + 1 > 1$), innen $g(1) = 2$. Hasonlóan $f(2) = 3$ (hiszen $g(2) = f(2) + 2 > f(1) + 2 = 3$). Ezek után elkezdhetjük kitölteni az alábbi táblázatot. Minden természetes számnak pontosan egyszer kell benne szerepelnie. Így ha a táblázatot valameddig már kitöltöttük, a következő oszlop „f sorába” a legkisebb, eddig még nem szereplő számnak, „g sorába” pedig a (*) képlet szerinti számnak kell kerülnie.

–	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...	234	235	236	237	238	239	240
f	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19	21	22	24	25	...	378	380	381	383	385	386	388
g	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31	34	36	39	41	...	612	615	617	620	623	625	628

A táblázatból leolvasható a végeredmény: $f(240) = 388$.

II. megoldás. A (*) összefüggés alapján

(**) $$f\big(f(n)\big) = f(n) + n - 1.$$

Ebből $f(3) = f\big(f(2)\big) = f(2) + 2 - 1 = 4$, $f(4) = 4 + 3 - 1 = 6$, $f(6) = 9$, $f(9) = 14$, $f(14) = 22$, $f(22) = 35$, $f(35) = 56$, $f(56) = 90$, és így $g(35) = 56 + 35 = 91$. Mivel minden $g(n)$ érték valamilyen $f(k)$ érték rákövetkezője, azért nem lehet

$g(36)$ értéke 92, következésképpen $f(57)=92$. Innen $f(92)=92+56=148$, $f(148)=239$, $f(239)=386$. Másrészt $g(148)=239+148=387$, ezért az előbbi okoskodás alapján $f(240)=388$.

III. megoldás. Legyen $a_0=1$, és $a_{n+1}+1=f(a_n+1)$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \dots)$. Ekkor $a_1=2$ és a (**) képlet szerint

$$a_{n+2}+1=f(a_{n+1}+1)=f\big(f(a_n+1)\big)=a_{n+1}+1+a_n$$

azaz az $\{a_n\}$ sorozat éppen a Fibonacci-sorozat. Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy

(***) $$f(a_n+x)=a_{n+1}+f(x) \qquad 1\le x\le a_{n-1} \qquad \text{esetén.}$$

Ehhez előbb megjegyezzük, hogy $f(y)$ értéke y-nál annyival több, ahány „g" van 1 és $f(y)$ között. Ennek értéke viszont megegyezik a maximális olyan m-mel, amelyre $g(m)=f\big(f(m)\big)+1\le f(y)$, ami pontosan akkor áll, ha $f(m)<y$. Így

$$f(a_n+x)=a_n+x+m,$$

ahol m a legnagyobb olyan szám, amelyre $f(m)<a_n+x$.

Mivel $f(a_{n-1}+1)=a_n+1\le a_n+x$ és $f(a_{n+1}+1)=a_{n+2}+1>a_n+x$, azért $a_{n-1}<m\le a_{n+1}$ és így alkalmazhatjuk az indukciós feltevést:

$$f(m)=f(a_{n-1}+m-a_{n-1})=a_{n+1}(m-a_{n-1}),$$

azaz m a legnagyobb olyan szám, amelyre $f(m-a_{n-1})<x$. Ez viszont éppen azt jelenti, hogy $f(x)=x+(m-a_{n-1})$, vagyis

$$f(a_n+x)=a_n+x+m=a_n+a_{n-1}+f(x),$$

ahogyan azt állítottuk.

A teljes indukció befejezéséhez még $(***)$-ot például $a=1$-re ellenőrizni kell: $f(a_1+1)=a_1+f(1)$, s ez valóban teljesül.

Végül minden 1-nél nagyobb pozitív szám egyértelműen írható fel $1+a_{i_1}+a_{i_2}+\dots$ alakban, ahol $i_j\le i_{j+1}+2$, $i_j\ge 0$. Ekkor $(***)$ alapján

$$f(1+a_{l_1}+a_{l_2}+\dots)=1+a_{i_1+1}+a_{i_2+1}+\dots,$$

ami ismét indukcióval igazolható. Esetünkben a Fibonacci-sorozat 240-nél kisebb tagjai: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, továbbá $240=1+1+5+233$, és így $f(1+1+5+233)=1+2+8+377=388$.

Megjegyzés. A megoldásokban feltételeztük, hogy létezik a feltételeket kielégítő f és g függvény. Annyit bizonyítottunk, hogy ha létezik, akkor $f(240)=388$ lehet csak. A megoldásokból az is kiderült, hogy legfeljebb egy ilyen f és q függvény létezhet.

IV. megoldás. Legyen $\alpha=(\sqrt5+1)/2$, $f(n)=[n\alpha]$ és $g(n)=[n\alpha^2]$. Állítjuk, hogy f és g eleget tesz a feladat összes feltételének. Így (feltéve, hogy f és g egyértelműen meghatározott) $f(240)=[240\alpha]=[120\sqrt5+120]=388$.

Először is világos, hogy f és g szigorúan monoton növekszik, hiszen $\alpha>1$ és $\alpha^2>1$. Másrészt $1/\alpha+1/\alpha^2=1$, α és α^2 irracionális, és így f és g értékkészlete minden egész számot pontosan egyszer ad ki (lásd Skljarszkij–Csencov–Jaglom: Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből, 1. kötet, 108. feladat). Így csak a

$$g(n)=f\big(f(n)\big)+1$$

összefüggést kell igazolnunk. De $g(n)\ne f\big(n)\big)$, hiszen f és g értékkészletének nincs közös eleme. Másrészt $[\alpha n]<\alpha n$, azaz

$$\begin{gathered}\big[[\alpha n]\alpha\big]\le[\alpha^2 n]\\ f\big(f(n)\big)\le g(n)\end{gathered}$$

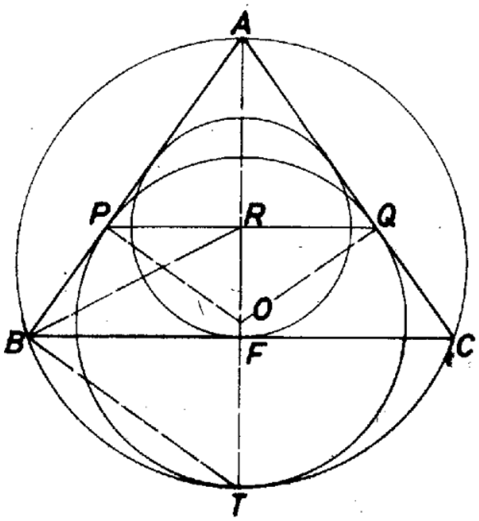
$\alpha>1$ és $1=\alpha^2-\alpha$ alapján az $\alpha n<\alpha+[\alpha n]=\alpha+(\alpha^2-\alpha)[\alpha n]$ egyenlőtlenséget α-val osztva és átrendezve

$$n+[\alpha n]<\alpha[\alpha n]+1,$$

amiből

$$\begin{gathered}g(n)=[\alpha^2 n]=[(1+\alpha)n]=\\ =n+[\alpha n]\le\big[\alpha[\alpha n]+1\big]=f\big(f(n)\big)+1.\end{gathered}$$

4. feladat. *Az ABC háromszögben $AB=AC$. Egy kör belülről érinti az ABC háromszög köré írt kört, továbbá az AB oldalt a P, az AC oldalt a Q pontban. Bizonyítsuk be, hogy a PQ szakasz felezőpontja az ABC háromszög beírt körének középpontja.* (USA, 5 pont).



4. ábra

Megoldás. Jelöljük az érintő kör középpontját O-val, az érintési pontot T-vel, BC felezőpontját F-fel és PQ felezőpontját R-rel (*4. ábra*). Az ábra szimmetriája folytán az A, R, O, F, T pontok mind rajta vannak a háromszög szimmetriatengelyén. $OP = OT$, hiszen mindkettő az érintő kör sugarával egyenlő, ezért a hasonló APO és ABT derékszögű háromszögekből

$$AP : PB = AO : OT = AO : OP = AP : PR,$$

hiszen AOP és APR is hasonló háromszögek. Így $PB = PR$, azaz BPR egyenlő szárú háromszög, tehát

$$ABR\sphericalangle = PBR\sphericalangle = BRP\sphericalangle = RBC\sphericalangle,$$

mert utóbbi kettő váltószög. Így R rajta van a háromszög B-ből induló szögfelezőjén is, tehát valóban a beírt kör középpontja.

5. feladat. *Álljon az* (a_k); $k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots$ *sorozat különböző pozitív egész számokból. Bizonyítsuk be, hogy minden* n *természetes számra*

$$\sum_{k-1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k-1}^{n} \frac{1}{k}.$$

(Franciaország, 6 pont).

Megoldás. Először megmutatjuk, hogy ha van olyan $n \geq i > j$ számpár, amelyekre $a_i < a_j$, akkor az egyenlőtlenség bal oldalát csökkenthetjük azzal, hogy a_i-t és a_j-t felcseréljük. Ugyanis a változás

$$\left(\frac{a_j}{i^2} + \frac{a_i}{j^2}\right) - \left(\frac{a_1}{i^2} + \frac{a_j}{j^2}\right) = (a_j - a_i)\left(\frac{1}{i^2} - \frac{1}{j^2}\right) < 0.$$

Mivel az $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ számokat csak véges sokféleképpen permutálhatjuk, a cseréket elég sokszor elvégezve a számaink már monoton nőnek, s közben a bal oldal értéke minden esetre nem nőtt. S mivel ekkor már $a_1 \geq 1,\ a_2 \geq 2,\ \ldots,\ a_n \geq n$, kapjuk, hogy az legalább

$$\frac{1}{1^2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{3^3} + \ldots + \frac{n}{n^2} = \sum_{k-1}^{n} \frac{1}{k},$$

amit bizonyítani kellett.

Megjegyzés. Ugyanezzel a gondolatmenettel látható be a következő állítás is: ha

$$x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \qquad \text{és} \qquad y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_n$$

tetszőleges számsorozatok, $i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_n$ pedig az $1,\ 2,\ \ldots,\ n$ számok tetszőleges permutációja, akkor

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_{n+1-k} \leq \sum_{k=1}^{n} x_k y_{i_k} \leq \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

6. feladat. *Egy nemzetközi társaságnak* 1978 *tagja van* 6 *különböző országból. A tagokat* 1*-től* 1978*-ig számozták meg. Mutassuk meg, hogy legalább egy olyan tag van, akinek a sorszáma megegyezik két honfitársa sorszámának összegével, vagy kétszer akkora, mint egy honfitársa sorszáma.* (Hollandia, 8 pont).

I. megoldás. Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz, ebből ellentmondásra fogunk jutni. Mivel $6\cdot 329 = 1974 < 1978$, azért valamelyik országból, A-ból legalább 330 tagnak kellett jönnie, legyenek sorszámaik

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_{330}.$$

Tekintsük az $a_2 - a_1,\ a_3 - a_1,\ \ldots,\ a_{330} - a_1$, sorszámú tagokat. Ezek egyike sem lehet A-beli, hiszen akkor volna a feltételnek megfelelő három tag. Így mind a 329 tag a megmaradt 5 ország valamelyikéből jött, és mivel $5 \cdot 65 = 325 < 329$, közülük egy országból, B-ből legalább 66-an jöttek, sorszámuk legyen

$$b_1 < b_2 < \ldots < b_{66}.$$

Nézzük most a $b_2 - b_1,\ b_3 - b_1,\ \ldots,\ b_{66} - b_1$ sorszámú tagokat. Ezek egyike sem jöhetett a B országból, ám az A országból sem. Ugyanis ha a $b_i - b_j = (a_m - a_1) - (a_n - a_1) = a_m - a_n$ sorszámú tag A-beli lenne, ismét találnánk három, a feltételnek megfelelő tagot. Így a fenti 65 tag 4 országból jött, így valamelyik országból, C-ből legalább 17-en jöttek, sorszámuk

$$c_1 < c_2 < \ldots < c_{17}.$$

Az előzőekhez hasonlóan a $c_2 - c_1,\ c_3 - c_1,\ \ldots,\ c_{17} - c_1$ sorszámú tagok csak három országból jöhettek, így a D országból legalább 6-an voltak:

$$d_1 < d_2 \ldots < d_6.$$

A $d_2 - d_1,\ d_3 - d_1,\ \ldots,\ d_6 - d_1|$ sorszámú tagok közül legalább 3 jött az E országból

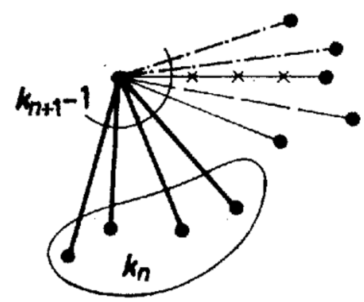
$$e_1 < e_2 < e_3,$$

végül az $f_1 = e_2 - e_1$, illetve $f_2 = e_3 - e_2$ sorszámú tagok csak a hatodik, F országból jöhettek. Ám ekkor az $f_2 - f_1$ sorszámú tag sehonnan sem jöhetett volna, ellentmondás, ami éppen az állítást bizonyítja.

II. megoldás. A következő állítást igazoljuk teljes indukcióval: ha egy legalább

$$k_n = n!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) + 1$$

csúcsú teljes gráf éleit n színnel kiszínezzük, akkor biztosan lesz benne egyszínű háromszög (azaz három csúcs úgy, hogy köztük bármely él ugyanolyan színű).



5. ábra

Az állítás $n = 1$-re nyilván igaz, mivel $k_1 = 3$. Tekintsünk most egy k_{n+1} szögpontú gráfot és annak tetszőleges csúcsát. Ebből a csúcsból $k_{n+1} - 1$ él indul ki, minden él $(n+1)$ szín valamelyikével színezve. Mivel $(n+1)\cdot(k_n - 1) = k_{n+1} - 2 < k_{n+1} - 1$, azért biztosan van k_n egyszínű él is, mondjuk fekete (*5. ábra*). Tekintsük ezek végpontjait. Ha a végpontok között van fekete él, máris találtunk egyszínű (fekete) háromszöget. Ha nincs, akkor a k_n végpont közötti élek csak n különböző színnel vannak színezve, és ekkor az indukciós feltevésünk értelmében már itt lesz egyszínű háromszög.

Tekintsünk most egy 1978 csúcsú gráfot, melynek csúcsai 1-től 1978-ig vannak megszámozva. Az i és j csúcs közti élet hat különböző szín valamelyikével színezzük ki, attól függően, hogy az $|i - j|$ sorszámú tag melyik országból jött. Mivel $k_6 = 1958 < 1978$, azért van egyszínű háromszög, a csúcsok száma legyen $i < j < k$. Ekkor a $j - i,\ k - j$ és a $k - i$ sorszámú tagok ugyanabból az országból valók, és $(j - i) + (k - j) = (k - i)$, ahogyan azt kívántuk.

Megjegyzések. 1. Elképzelhető, hogy $j - i = k - j$. Ekkor nem három, hanem csak két tag sorszámát kapjuk, de az egyik sorszám éppen kétszer akkora, mint a másik.

2. A második megoldásból az is kiolvasható, hogy n ország esetén ha a társaságnak legalább k_n tagja van, létezik a kérdezett tulajdonságú tag. Igazolható, hogy ha $g(n)$-nel jelöljük a legkisebb olyan tagszámot, amelyre ilyen tulajdonságú társaság létezik, akkor

$$\frac{3^n + 1}{2} \le g(n) \le n!\left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{1!}\right) + 1.$$

Azt is tudjuk, hogy $g(1) = 3,\ g(2) = 5,\ g(3) = 14.$ $g(4)$ pontos értéke nem ismeretes.