

Az  $x^3 - 1 = 0$  harmadfokú egyenletnek egy valós gyöke van:  $x = 1$ , valamint két komplex gyöke:  $\varepsilon = (-1 + i\sqrt{3})/2$  és  $\varepsilon^{-1} = (-1 - i\sqrt{3})/2$ . Ha felrajzoljuk a komplex számsíkon az összes olyan pontot, amely  $a + b\varepsilon$  alakban írható fel egész  $a$ -val és  $b$ -vel, szabályos hatszögrácsot kapunk. Ezeket a számokat nevezzük Euler-egészeknek. Közöttük értelmezhető a szorzás:  $(a + b\varepsilon)(c + d\varepsilon) = (ac - bd) + (ad + bc - bd)\varepsilon$ , amit a könnyen igazolható  $\varepsilon^2 = -1 - \varepsilon$  alapján kapunk.

Egy Euler-egész összetett, ha két másik Euler-egész szorzataként írható fel. Például a  $-3 = -3 + 0 \cdot \varepsilon$  összetett, mivel egyenlő  $(1 + 2\varepsilon)(1 + 2\varepsilon)$ -nal, ugyanakkor  $1 + 2\varepsilon$  már nem összetett, ún. Euler-prím. Jelen esetben az  $1, -1, \varepsilon, -\varepsilon, 1 + \varepsilon, -1 - \varepsilon$  különleges szerepet játszik, mert minden Euler-egész osztható velük, ezeket egységeknek hívják, de nem prímeznek. (Mint ahogyan az egészek körében a  $+1$  vagy a  $-1$  sem prím.) A hátsó borítón látható ábrán az Euler-prímek egy részét láthatjuk.

Az Euler-egészek használhatók annak bizonyítására, hogy az  $x^3 + y^3 = z^3$  Fermat-féle egyenletnek nincs egészekből álló nem triviális megoldása. Pontosabban azt a többetmondó állítást lehet igazolni, hogy nincsenek olyan  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ , különböző Euler-egészek, melyekre  $\xi_1^3 + \xi_2^3 + \xi_3^3 = 0$  állna.