Híres matematikai feladatok

Egy Eulertől származó feladat és annak hazai vonatkozásai

Leonhard Euler (1707–1783) vetette fel 1751-ben azt az elemi geometriai kérdést, hogy az n oldalú (síkbeli) konvex sokszög hányféleként darabolható föl háromszögekre olyan átlók segítségével, amelyek nem metszik egymást a sokszög belsejében (hányféleként „háromszögelhető”). Jelölje ezt a számot H_n. Nyilván $H_3 = 1$. Később hasznunkra lesz, ha H_2 értékét 1-nek definiáljuk. Könnyű belátnunk, hogy $H_4 = 2$, $H_5 = 5$. Ha azonban $n \geq 6$, akkor egyre bonyolultabb meghatároznunk a háromszögelések számát.

A felvetett kérdésre csakhamar maga Euler válaszolt, teljes indukcióval bizonyítva, hogy

(1) $$H_\pi = \prod_{k=3}^{\pi} \frac{4k-10}{k-1}.$$

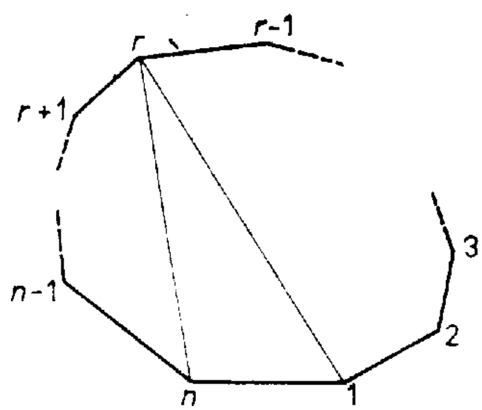
(Emlékeztetőül: a $\prod$ szimbólum produktumra [szorzatra] utal. Pl. $\prod_{k=2}^{5} k = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$).

A Pozsony közelében született *Segner János András* (1704–1777), aki rövid ideig Debrecenben működött mint orvos, majd német egyetemeken tanított, szintén megoldotta 1761-ben a feladatot, és az alábbi rekurzív képletet közölte:

(2) $$H_n = \sum_{r=2}^{n-1} H_r \cdot H_{n+1-r}.$$

A „rekurzió” a matematikában gyakran alkalmazott módszer. Jelen esetben azt jelenti, hogy pl. H_{20} kiszámításához ismernünk kell H_2, H_3, …, H_{19} mindegyikét.

A Segner–féle bizonyítás nem igényel mélyebb matematikai módszereket, és könnyen megérthető. Eljárása a következő volt:



Válasszuk ki az n oldalú sokszög valamelyik oldalát – mondjuk $1n$-et (vö. ábra) – és tekintsük ezt egy valamelyik felbontáshoz tartozó háromszög alapjának. E háromszög harmadik csúcsa legyen a sokszög r-edik szögpontja. Az $n1r$ háromszög két sokszöget hasít le az eredeti sokszögből, ezek közül az egyik r, a másik pedig $n+1-r$ oldalú. Ezek háromszögeléseinek száma H_r, illetve H_{n+1-r}. Nyilvánvaló, hogy e két sokszög valamelyikének minden felbontásához hozzárendelhető a másik minden felbontása. Ezért az r csúcs és az $1n$ alap rögzítése esetén $H_r \cdot H_{n+1-r}$ felbontás lehetséges. Az összes lehetséges felbontáshoz pedig úgy jutunk, ha r rendre felveszi a 2, 3, …, $n-1$ számokat, és az így kapott értékeket összegezzük. Így nyerjük a (2) formulát, amelyben – mint említettük – $H_2 = H_3 = 1$.

Segner H_n értékét $n = 20$-ig ki is számította.

Ezzel azonban nem zárult le az Euler–feladat története: az 1956. évi *Schweitzer Miklós* versenyen[1] is kitűzték ezt a kérdést, felvetője talán nem tudott a probléma eredetéről. Hat sikeres válasz között szerepelt a következő formula:

(3) $$H_n = \frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2}.$$

[1] *Schweitzer* Miklós (1923–1945) jeles matematikus volt, akit származása miatt az érettségi vizsgálat után nem vettek fel egyetemre. ő azonban ezek ellenére – önképzés útján elmélyedt a matematikai kutatások módszereiben, és jelentős eredményeket ért el az analízis területén. Budapest ostroma idején igen fiatalon halálozott el. Emlékének megörökítésére a Bolyai János Matematikai Társulat 1949-ben évenként megrendezésre kerülő „Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny”-t létesített egyetemi hallgatók részére. A verseny rendezését felváltva végzik a budapesti, a debreceni és a szegedi tudományegyetem matematikusai. Általában tíz, a magasabb matematikába tartozó feladatot tűznek ki, a résztvevők bármilyen segédeszközt igénybe vehetnek és 8–10 napon át otthon foglalkozhatnak a feladatokkal. Ez a világon az egyik legmagasabb szintű matematikai verseny, az eddig kitűzött feladatok számos önálló kutatásnak képezték a kiinduló pontját.

Észrevehetjük, hogy az (1) és a (3) képlet a H_n természetes számot szorzatként, (2) ugyanazt a természetes számot kéttényezős szorzatok *összegeként* állítja elő. Így a három különböző képlet számelméleti érdekességet is rejt magában.

Gyakorlásként érdemes H_n értékét különböző n-ekre kiszámítani, továbbá az (1) és a (3) igazolásán gondolkodni.

Teljesség kedvéért meg kell említenünk, hogy a Schweitzer–verseny valamivel többet is kérdezett, mint Euler. Könnyen belátható ugyanis, hogy $n \geq 6$ esetén olyan háromszögelések is vannak, amelyeknél egyes háromszögeknek egyetlen oldaluk sem közös a sokszög valamelyik oldalával. Kérdezhetjük tehát azt is, hogy az összes lehetséges háromszögelésekből mennyi azok száma, amelyeknél a sokszöget csupa olyan háromszögekre daraboljuk, amelyek mindegyikének legalább egy közös oldala van a sokszöggel. Ez utóbbi megszorításnak eleget tevő háromszögelések számát jelölje h_n. Bizonyítható, hogy

$$h_n = n \cdot 2^{n-5}.$$

Például $H_6 = 14$, $h_6 = 12$; $H_7 = 42$, $h_7 = 28$.