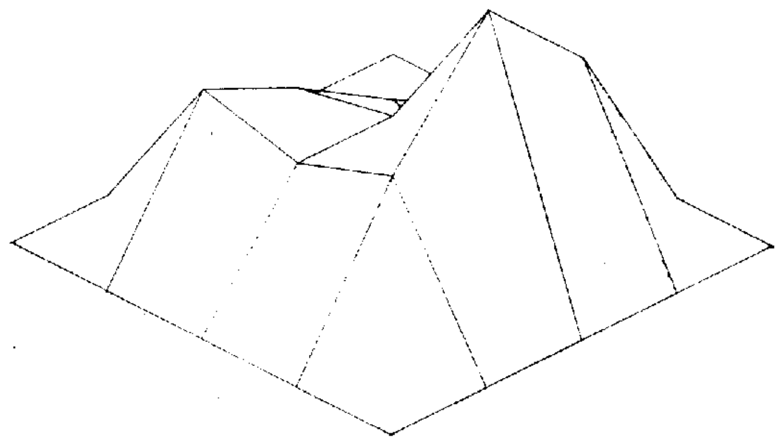
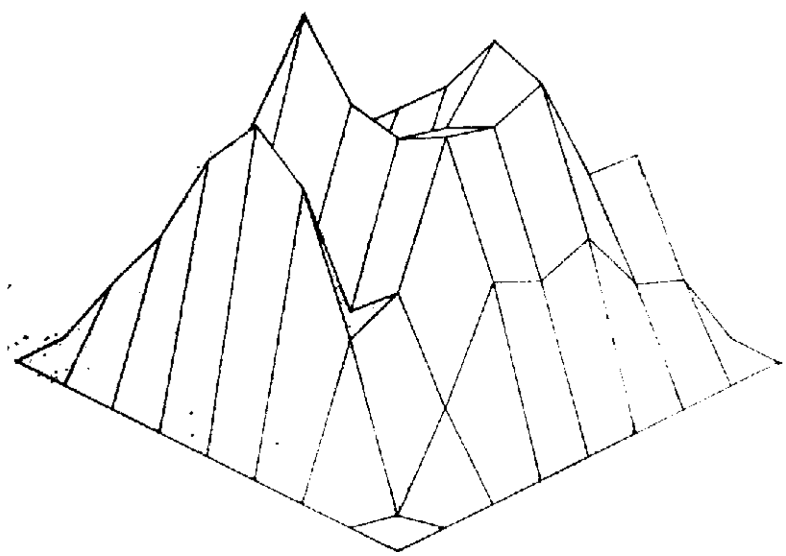
Sok kisgyerek játszik az udvaron. Össze-vissza szaladgálnak, egymásba ütköznek, és szaladnak tovább. Köztük van egy nagy labda, ennek is neki-neki futnak minden oldalról, visszapattannak róla, és futnak tovább. Ha valamelyik oldalról egyszerre többen futnak a labdának, az lomhán odébb gurul. Mi a magasból figyeljük az egészet, olyan magasból, hogy a gyerekeket nem is látjuk, csak a labdát. Az is csak egy pontnak látszik, amelyik furcsa, értelmetlennek látszó, cikk-cakkos mozgást végez. Ezt a mozgást Brown-mozgásnak nevezzük első megfigyelője tiszteletére, aki a mikroszkóp lencséje alatt vízben úszkáló virágporszemeket vizsgálta. A víz láthatatlan molekulái, mint megannyi iskolásgyerek, össze-vissza lökdösték a náluk lényegesen nagyobb virágporszemeket, amelyek mozgását a mikroszkóp már láthatóvá tette.



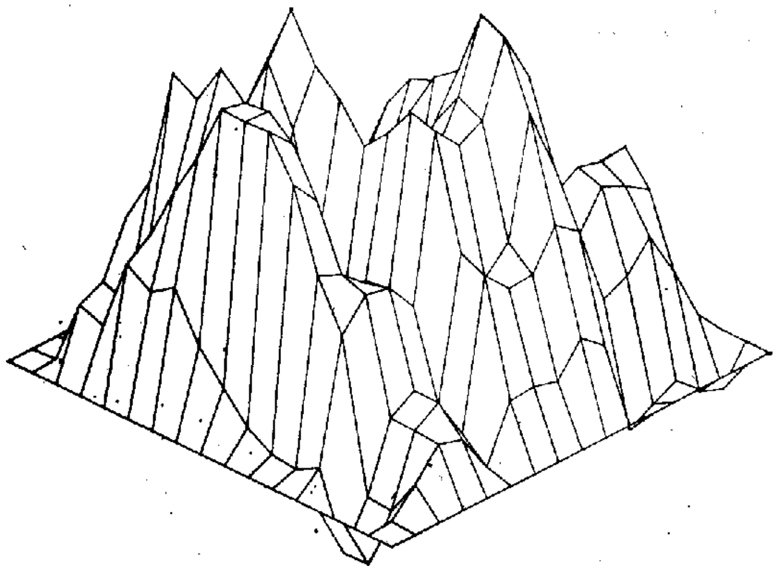


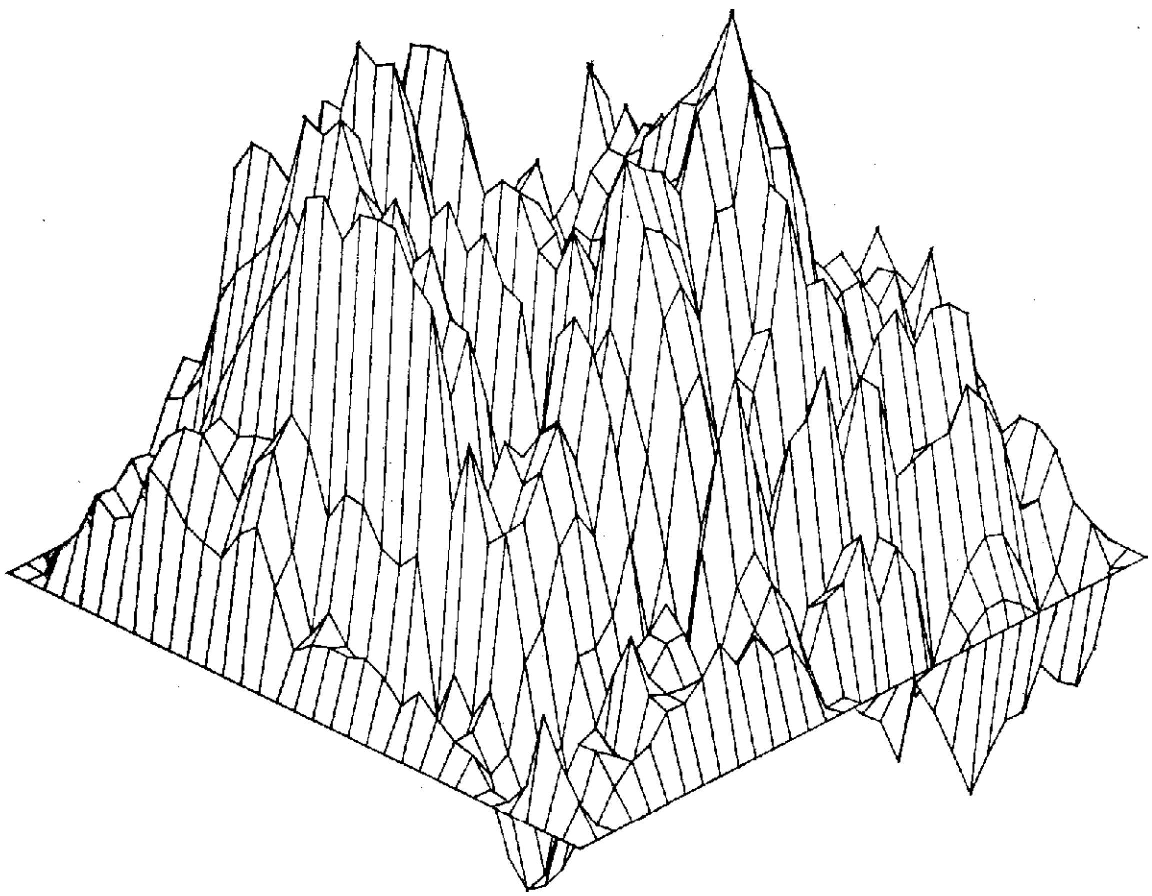
Ha le akarjuk írni a Brown-mozgást, vizsgáljuk először csak az egyik koordinátáját. Képzeljük el, hogy az első koordináta változásáról filmet készítettünk, és a pont $t = 0$ időponthoz tartozó helyzetét választottuk origónak. Nézzük meg először, hol van a pont $t = 1$ mellett. Jelöljük az első koordináta értékét itt $X(1)$-gyel $\big(X(0) = 0\big)$. $X(1)$-ről egyelőre csak annyit tudunk, hogy értéke függ a véletlentől, és mivel a gyerekek mozgásában semmi irányítottság nincs, valamilyen a-nál nagyobb értéket épp akkora valószínűséggel vehet fel, mint $(-a)$-nál kisebbet. Azt mondjuk, hogy $X(1)$ eloszlás szimmetrikus az 0-ra. Van még egy másik feltételünk is, ennek megfogalmazásához szükségünk van a várható érték fogalmára. $X(1)$ várható értéke 0, és $X^2(1)$ várható értéke 1.

Keressük most ki azt a filmkockát, amelyik a $t = 1/2$ időponthoz tartozik. Mit mondhatunk a megfelelő $X(1/2)$ értékről? Az

$$A = X(1/2), \qquad B = X(1) - X(1/2)$$

mennyiségek a részecske első és második félperc alatt megtett útjai (legyen mondjuk az időegység perc). Jellegüket tekintve tehát ugyanolyan mennyiségek, és ami számunkra sokkal fontosabb, függetlenek egymástól. Ennek alapján belátható, hogy mindkettő várható értéke 0, négyzetük várható értéke pedig 1/2.





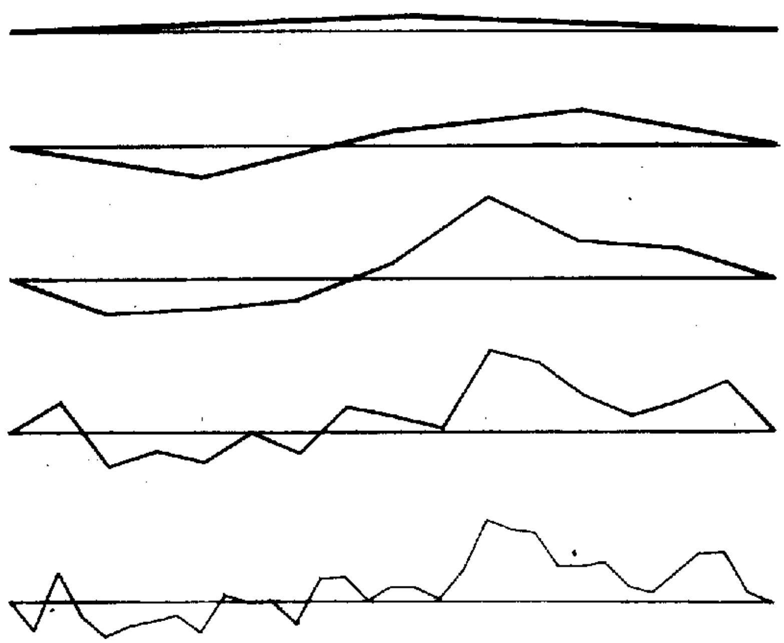
Hasonlóan tovább haladva, lépésről lépésre felezzük meg a már megvizsgált intervallumokat. Az n-edik lépésben már az $\{X(i/2^n),\ 0 \leqq i \leqq m = 2^n\}$ koordinátákat figyeljük meg, amelyek rendre az azonos viselkedésű és független $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \ldots,\ \varepsilon_m$ növekmények részletösszegei:

$$X(i/2^n) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_i.$$

Belátható, hogy az ε_i-k várható értéke 0, és négyzetük várható értéke $1/2^n$. Sokkal lényegesebb következmény azonban az, hogy az a feltétel, hogy az $X(1)$ változót egyre több független és egyforma eloszlású véletlen szám összegére felbonthatjuk, már egyértelműen meghatározza $X(1)$ eloszlását, eszerint annak valószínűsége, hogy $X(1)$ kisebb a-nál, csak a következő érték lehet:

$$P\big(X(1) < a\big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \int_{-\infty}^{a} e^{-\dfrac{u^2}{2}}\, du.$$

Ez az úgynevezett normális eloszlás. Következésképpen az ε_i-k is normális eloszlásúak, és mivel ilyen eloszlású véletlen számokat a számítógépek is elő tudnak állítani, az $X(i/2^n)$ függvényértékeket gépen is kiszámíthatjuk. Így készültek a mellékelt ábrák, n különböző értékeire $\big[$az $X(i/2^n)$ értékek között lineárisan interpoláltunk, és $X(1)$ értékét – pusztán esztétikai okokból – 0-nak választottuk$\big]$.



Ha eleve elhatározzuk, milyen n mellett ábrázoljuk az $X(i/2^n)$ függvényértékeket, elég az $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ növekményeket meghatározni. Ha azonban minden valós $0 \leqq t \leqq 1$-re meg akarjuk határozni $X(t)$ értékét, még egy észrevételre szükségünk van. Ha először $X(1)$ értékét választjuk meg, egyetlen véletlen, normális eloszlású, 0 várható értékű, 1 szórású számot kell előállítanunk. (Az, hogy a négyzet várható értéke 1, azt jelenti más szóval, hogy a szórás 1.) Ha azonban már $X(1)$ értékét meghatároztuk, hogyan válasszuk meg $X(1/2)$ értékét? Ha előre meggondoltuk volna, hogy erre is kíváncsiak leszünk, az

$$A = X(1/2), \qquad B = X(1) - X(1/2)$$

növekményeket állítottuk volna elő. Most már azonban késő. Már meghatároztuk az $X(1) = A + B$ összeget, és ezután kell megmondani, hogy mennyi legyen ennek az A és B tagja. Szerencsére, ha A, B független, egyforma eloszlású normális változók, $(A + B)$ és $(A - B)$ is egyforma eloszlású, és a kettő független egymástól. Legyen hát $\widetilde{X}(1)$ az $X(1)$-től független, 0 várható értékű, 1 szórású, normális eloszlású véletlen szám, akkor

$$X\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\big(X(1) + \widetilde{X}(1)\big).$$

Ez most már hasonlóan folytatható a végtelenségig. Egymás után határozhatjuk meg az $\big[X(i/2^n), \quad 0 \leqq i \leqq 2^n\big]$ függvényértékeket n soron következő értékeire. És ami a legfontosabb: az eljárás konvergál, és így végül is megkapjuk a keresett $X(t)$ függvényt. E függvény sok érdekes és meglepő tulajdonsága közül most csak egyet említünk: folytonos, de sehol sem differenciálható.

Ha az $X(t)$ mellé tőle független, vele megegyező eloszlású folyamatokat veszünk, síkbeli; illetve térbeli mozgások leírására alkalmas függvényeket kapunk. Így azonban még mindig csak egy pont mozgását írjuk le. Nagy rendszerek mozgását, például a tenger hullámzását két-, illetve háromváltozós függvényekkel írhatjuk le. Ilyeneket mutatnak a mellékelt ábrák, egy adott t időpillanatban.