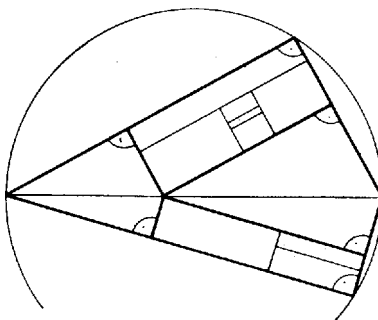


I. megoldás. Egy konvex négyszög akkor és csak akkor húrnégyszög, ha két szembenfekvő szögének összege 180° . Legegyszerűbbnek tekinthetjük a négy derékszöggel bíró téglalap esetét, erre ugyanis már $n = 2$ mellett helyes az állítás, mert bármelyik szemben levő oldalpárjával párhuzamos vágással két téglalagra vágható, és a kettévágás akárhányszor, bármelyik résztéglalapon megismételhető. – Erre tekintettel elég bizonyítanunk a következő állítást: *minden konvex négyszög szétvágható 4 darab húrnégyszögre úgy, hogy a részek közül legalább az egyik téglalap.*

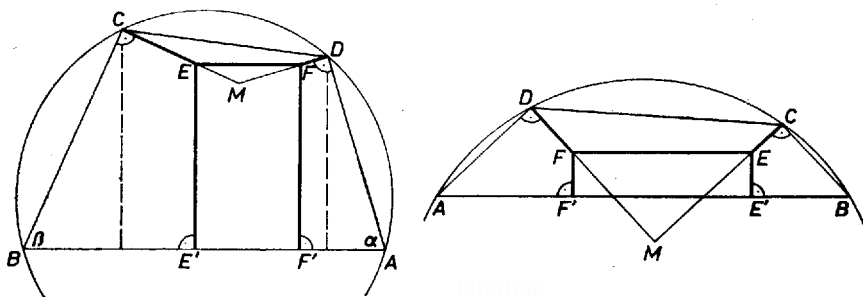
Ha a négyszögnek van derékszöge, de nem mindegyik szöge derékszög, akkor természetesen két szemben levő csúcánál vannak a derékszögek, és a további két szög csúcsát összekötő átló Thalész tétele alapján a körülírt körnek átmérője és a négyszög belsejében halad (1. ábra).



1. ábra

Véve ennek bármely belső pontját, és merőleges szakaszt bocsátva belőle mind a négy oldalra, az adódó talppont mind a négy esetben belső pontja az illető oldalszakasznak. E szakaszok mentén szétvágva a négyszöget, tüstént látjuk, hogy két téglalap és két, a kiinduláshoz hasonló négyszög keletkezett, az állítás tehát helyes.

Ha pedig a négyszögnek egyik szöge sem derékszög, akkor van tompaszöge, és az ezzel szomszédos szögek egyike szintén tompaszög. Válasszuk úgy a betűzést, hogy a hegyesszögek csúcsai A és B , a tompaszögek csúcsai C és D . Állítsunk merőleges félegyenest C -ben a CB , és D -ben a DA oldalra, a négyszöget tartalmazó partjukon. Ezek a félegyenesek a CD szakasszal hegyesszöget zárnak be: $\gamma - 90^\circ$ -ot, illetve $\delta - 90^\circ$ -ot, ezért metszik egymást egy M pontban. Vegyünk továbbá AB -vel párhuzamosan egy olyan egyenest, amely elválasztja a C, D pontpárt az A, B, M ponthármastól (2. ábra), és jelöljük az MC, MD szakaszon levő pontját E -vel, F -vel, továbbá ezek vetületét az AB egyenesen rendre E' -vel, F' -vel.



2. ábra

Megmutatjuk, hogy a CE, EF, FD, EE' és FF' szakaszok menti szétvágás megfelel célunknak.

Ugyanis $\beta < 90^\circ$ miatt a CM félegyenes metszi a BA félegyeneset, ezért M a C -ből AB -re bocsátott merőlegesnek, C „magasságvonalának” B -t nem tartalmazó, az AD -t tartalmazó partján van; hasonlóan $\alpha < 90^\circ$ miatt M a D magasságvonalának az A -t nem tartalmazó, B -t és C -t tartalmazó partján van. Ezek szerint M e két magasságvonal közti sávban van, és itt van E, F is mint az MC , illetve MD szakasz pontja, továbbá E', F' is. Másrészt E, F az eredeti négyszögben is benne vannak, AB -nek a C -t és D -t tartalmazó partján.

A szétdarabolás részei húrnégyszögek: $EFF'E'$ téglalap, $AF'FD$ -ben és $BE'EC$ -ben két–két szemben levő csúcsnál derékszög van, végül a $CEFD$ négyszögben

$$\angle DCE + \angle EFD = (\gamma - 90^\circ) + \{360^\circ - 90^\circ - (180^\circ - \alpha)\} = \gamma + \alpha = 180^\circ.$$

Ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

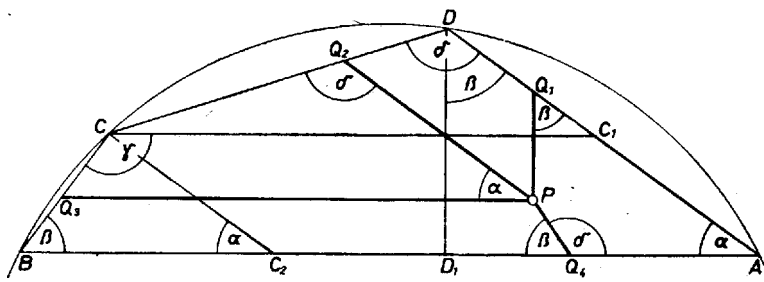
Sővér Ferenc (Bonyhád, Petőfi S. Gimn., III. o. t.)

II. megoldás. A feladat állítása ugyancsak már $n \geq 2$ mellett érvényes akkor is, ha a kiindulási húrnégyszög szimmetrikus trapéz, mert ezt bármelyik az alapjaival párhuzamos szelője két szimmetrikus trapézra osztja. (Tulajdonképpen a szimmetrikus trapéznak speciális esete az I. megoldásban lényeges szerepet játszott téglalap.) Ennek alapján elég

azt bizonyítanunk, hogy minden olyan $ABCD$ konvex négyszög, melynek egymás utáni szögei α , β , γ és δ , és ezekre $\alpha + \gamma = 180^\circ$ (tehát egyszersmind $\beta + \delta = 180^\circ$ is), szétvágható két szimmetrikus trapézra és két olyan négyszögre, melyeknek egymás utáni szögei α , β , γ , δ . Egyszerűség kedvéért és az I. megoldásra is tekintettel kizárjuk a következő eseteket: α , β , γ , δ közt van derékszög, továbbá $\alpha = \beta$ és $\alpha = \delta$; így föltehetjük, hogy

$$(1) \quad \alpha < \beta < 90^\circ < \delta < \gamma.$$

Olyan pontot keresünk, ahonnan a keresett 4 vágás kiindulhat. Az egyik szimmetrikus trapéz egyik hegyesszögét B -ben kívánjuk úgy, hogy hosszabb alapja a BA oldal része legyen, szára a BC -nek része; a másik trapéz rövid alapja pedig a DA -nak, egyik szára a DC -nek legyen része. Mivel (1) szerint $\gamma + \beta > 180^\circ$ és $\gamma + \delta > 180^\circ$, azért van az AD szakaszon olyan C_1 pont és az AB szakaszon olyan C_2 , hogy CC_1AC_2 paralelogramma (3. ábra).



3. ábra

Ennek minden belső pontján át húzható olyan párhuzamos AB -vel és AD -vel a két trapéz másik alapja céljára, amely B és C , illetve D és C között halad el, továbbá $\beta > \alpha$ alapján a B csúcsú trapéz másik szára is benne lesz a négyszögben. Avégett pedig, hogy a D csúcsú trapézban a DA -n levő csúcsában is δ nagyságú szöge lehessen, a keresett pontnak abban DAD_1 háromszögben is benne kell lennie, amelyre $D_1DA \sphericalangle = \beta$ és D_1 az AB oldal belső pontja. Ilyen D_1 van, mert $\beta < \delta$.

A paralelogrammának és a DAD_1 háromszögnek van közös belső pontja, legyen egy ilyen P . Innen párhuzamost húzva D_1D -vel, AD -vel, AB -vel, rendre az AD , DC , CB oldal egy-egy belső pontjában érjük el a négyszög területét – az ábrán rendre Q_1 , Q_2 , Q_3 –, végül az AB oldal belsejében olyan Q_4 is van, amelyre $PQ_4B \sphericalangle = Q_3BQ_4 \sphericalangle = \beta$. Így az AQ_1PQ_4 konvex négyszögben Q_4 -nél δ , Q_1 -nél β szög van, tehát P -nél γ , és a PQ_3CQ_2 négyszög szögei is rendre α , β , γ , δ .

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Megjegyzések. 1. Tulajdonképpen elég lett volna egy szimmetrikus trapézt biztosítani a 4 rész közt, amint ezt az I. megoldás végén a téglalappal tettük. Így viszont áttekinthetőbben biztosítottuk, hogy $Q_3PQ_2 \sphericalangle = BAD \sphericalangle$ legyen.

2. Rámutatunk egy kifejezésre, ami első pillanatra csupán nyelvi kérdésnek látszik. Mindkét megoldásban ezzel vezettük be, hogy mit akarunk tenni: „*elég* bizonyítanunk, hogy ...”. Sokszor halljuk, olvassuk efféle helyzetekben: „*azt kell* bizonyítanunk, hogy ...”.

Ha ez a „*kell*” itt helyes volna, akkor az I. megoldás célkitűzése ütné a II. megoldást, hiszen az utóbbi nem biztosítja az első szerint – más szavakkal – *szükséges, nélkülözhetetlen* téglalapot. (Fordítva viszont a szimmetrikus trapéz speciálisan lehet téglalap.)

Az „*elég*” azt jelenti: *így* – lehet, a „*kell*” pedig valami ilyet: *csak* így lehet. A „*kell*”-et mondót valószínűleg semmi külső körülmény *nem kényszeríti* a tervezett eljárásra, legföljebb az a belső körülmény, hogy *ő máshogy nem tudja*. Aki pedig megelégszik az „*elég*”-gel, az – esetleg – látja, hogy *máshogyan is lehetne*. Oda jutottunk tehát, hogy ennek a különbségnek a tisztán látása igen is lényeges matematikai kérdés, jobb áttekintést mutat a kérdésben.

3. Kézenfekvő abból kiindulni, hogy a húrnégyszöget a köréje írt kör O középpontjából az oldalakra bocsátott merőlegesekkel vágjuk 4 részre. Ez azonban hármasszétválasztásra vezet aszerint, hogy O belső vagy kerületi pontja-e a négyszögnek, illetve ha O kívül van; így a bizonyítás a fentieknél valamivel hosszabb.