# Olimpiai előkészítő feladatok
## 7.

Ebben a rovatban havonta tíz–tíz olyan érdekes – könnyebb vagy nehezebb – feladatot mondunk el, amelyek előkészítőül szolgálnak a Matematikai Diákolimpiára. A feladatok megoldásait nem kérjük beküldeni, a megoldásokat sem fogjuk ismertetni. Az érdeklődők a feladatokkal kapcsolatos kérdéseikkel forduljanak a szerkesztőséghez. Leveleikre írásban válaszolunk.

**1.** A Föld körül 36 mesterséges bolygó kering. Mutassuk meg, hogy mindig található a Földnek olyan pontja, ahonnan legfeljebb 17 látható közülük.

**2.** Elhelyezhető-e 91 darab $1 \times 2 \times 4$-es tégla egy $9 \times 9 \times 9$-es kockában?

**3.** Adott az $ABCD$ alaplapú és $A'B'C'D'$ fedőlapú kocka. Az $ABCDA$ zárt töröttvonalon egy $P$ pont, a $B'C'D'A'B'$ zárt töröttvonalon egy $Q$ pont mozog, sebességük egyenlő. Amikor a $P$ pont $A$-ban van, a $Q$ pont $B'$-ben. Mi a mértani helye a $PQ$ szakasz felezőpontjának?

**4.** Az előbbi kocka $AC$ lapátlóján kiválasztunk egy $X$ pontot, a $B'D'$ lapátlóján egy $Y$ pontot. Mi az $XY$ szakasz $Y$-hoz közelebbi harmadolópontjának mértani helye, ha $X$ és $Y$ minden lehetséges helyzetet felvesz?

**5.** Az $a$, $b$, $c$ páronként kitérő egyenesek párhuzamosak az $S$ síkkal. Az $a'$, $b'$, $c'$ egyenesek mindegyike metszi az $a$, $b$, $c$ egyenesek mindegyikét. Mutassuk meg, hogy van olyan $S'$ sík, mellyel az $a'$, $b'$, $c'$ egyenesek mindegyike párhuzamos.

**6.** Az $ABCD$ tetraéder $BCD$ lapja köré írt kör középpontja $A'$, az $ACD$ lap köré írt kör középpontja $B'$, stb. Az $A$, $B$, $C$, $D$ csúcsokból rendre merőlegest állítunk a $B'C'D'$, $A'C'D'$, $A'B'D'$, illetve $A'B'C'$ síkokra. Bizonyítsuk be, hogy a négy merőleges egyetlen pontban metszi egymást.

**7.** Az $O$-ból induló $a$, $b$, $c$ félegyenesek páronként derékszöget zárnak be (azaz derékszögű triédert alkotnak). Egy sík az $a$, $b$, $c$ félegyeneseket rendre az $A$, $B$, $C$ pontokban metszi. Mutassuk meg, hogy

*a)* $ABC$ hegyesszögű háromszög;

*b)* adott $XYZ$ hegyesszögű háromszöghöz található olyan metsző sík, melyre $ABC$ egybevágó $XYZ$-vel.

*c)* $O$-nak az $ABC$ síkra eső vetülete az $ABC$ háromszög magasságpontja.

**8.** *a)* Milyen $n$-re létezik $n$ élű konvex poliéder?

*b)* Bizonyítsuk be, hogy konvex poliéderben a háromszöglapok és a háromélű csúcsok együttes száma legalább 8.

*c)* Mutassuk meg, hogy ha egy konvex poliédernek sem háromszögű, sem négyszögű lapja nincs, akkor legalább 12 ötszögű lapja van.

**9.** Lehet-e *a)* kockát, *b)* szabályos oktaédert, *c)* szabályos dodekaédert merőlegesen vetíteni úgy, hogy a vetület konvex burka szabályos hatszög legyen?

**10.** *a)* Mutassuk meg, akárhogyan választunk is ki az egységnyi élű kockában $n > 9$ pontot, mindig található köztük négy, melyek által meghatározott tetraéder térfogata legfeljebb $1/n$.

*b)* Legyen $p$ prímszám és jelöljük az $i$ egész szám $p$-vel való osztásakor adódó maradékot $\langle i \rangle$-vel. Bizonyítsuk be, hogy az $(\langle i \rangle, \langle i^2 \rangle, \langle i^3 \rangle)$ $(i = 1, 2, \ldots, p-1)$ koordinátájú pontok között nincs négy egy síkban. Ennek alapján mutassuk meg, hogy minden $n > 9$ mellett megadható az egységnyi élű kockában $n$ pont úgy, hogy bármely négy által meghatározott tetraéder térfogata legalább $1/48n^3$.