Ebben a rovatban havona tíz-tíz olyan érdekes – könnyebb vagy nehezebb – feladatot mondunk el, amelyek előkészítőül szolgálnak a Matematikai Diákolimpiára. A feladatok megoldásait nem kérjük beküldeni, a megoldásokat sem fogjuk ismertetni. Az érdeklődők a feladatokkal kapcsolatos kérdéseikkel forduljanak a szerkesztőséghez. Leveleikre írásban válaszolunk.

Rácspontoknak nevezzük a sík azon pontjait, melyek mindkét koordinátája egész. A rácspontok együtt négyzetrácsot alkotnak. A koordinátatengelyekkel párhuzamos, rácspontokon átmenő egyenesek a rácsegyenesek. Egy sokszög rácssokszög, ha minden csúcsa rácspont. Egy rácssokszög üres, ha sem belsejében, sem oldalain (a csúcsokat kivéve) nincs rácspont. A térbeli kockarács pontjai azok a pontok, melyeknek mindhárom koordinátája egész.

1. Milyen szabályos sokszögek lehetnek rácssokszögek? 2. Milyen szabályos sokszögek csúcsai lehetnek egy térbeli kockarács pontjaiban? 3. Mutassuk meg, hogy minden egyenlő oldalú rácssokszögnek páros sok csúcsa van. 4. *a)* Mutassuk meg, hogy bárhogyan jelölünk ki a síkbeli négyzetrácsban 5 rácspontot, az őket összekötő szakaszok között lesz olyan, amely tartalmaz rácspontot a belsejében.

b) Mutassuk meg, hogy bárhogyan jelölünk ki a négyzetrácsban 9 rácspontot, mindig van közöttük három, amely által meghatározott háromszög súlypontja is rácspont. 5. Egy $n \times n$-es rácsnégyzet két átellenes csúcsát rácsegyenesek mentén haladó, $2n$ hosszúságú töröttvonallal kötjük össze. Mutassuk meg, hogy a töröttvonalak között $\binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n-2}$ olyan van, mely a kezdő- és végpont kivételével teljes egészében a négyzet átlója alatt van. 6. *a)* Mutassuk meg, hogy ha egy kör középpontja rácspont és a kör kerületén van rácspont, akkor a kerületén legalább négy rácspont van. *b)* Mutassuk meg, hogy a sík bármely racionális koordinátájú pontja körül tetszőlegesen sok olyan kört lehet írni, amelynek a kerületén legalább két rácspont van. 7. *a)* Mutassuk meg, hogy bármely n természetes számhoz lehet a síkban olyan kört megadni, amelynek a belsejében pontosan n rácspont van.

b) Adjunk meg olyan kört, amelynek a belsejében pontosan 10 rácspont van. 8. Fektessünk a négyzetrácsra olyan legalább 2 egység sugarú kört, mely nem megy át egyetlen rácsponton sem. A kör belső határpontjai azok a pontok, melyek a kör belsejébe esnek, de a négy szomszédjuk közül valamelyik már nem. Hasonlóan a külső határpontok azok a rácspontok, melyek a kör külsejébe esnek, de valamelyik szomszédjuk már nem. Bizonyítsuk be, hogy mindig néggyel több külső határpont van, mint belső határpont. 9. *a)* Bizonyítsuk be, hogy az üres rácsparalelogramma területe 1, az üres rácsháromszög területe 1/2.

b) Igazoljuk, hogy ha egy önmagát nem metsző, zárt rácssokszög kerületén k, belsejében b rácspont van, akkor területe $k/2 + b - 1$. 10. *a)* Bizonyítsuk be, hogy minden konvex négyszögnek van olyan csúcsa, melyet a rajta át nem menő átló felezőpontjára tükrözve a négyszög belső- vagy határpontját kapjuk.

b) Bizonyítsuk be, hogy üres konvex rácssokszög csak háromszög vagy paralelogramma lehet.

Ajánlott irodalom: *Skljarszkij–Csencov–Jaglom:* Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből; *Erdős Pál–Surányi János:* Válogatott fejezetek a számelméletből; ELTE–TTK: Elemi matematikai feladatgyűjtemény; KöMaL korábbi évfolyamai; *Kárteszi Ferenc:* Szemléletes geometria; *Hajós–Neukomm–Surányi:* Matematikai versenytételek, II. kötet.