Ebben a rovatban havonta tíz-tíz olyan érdekes – könnyebb vagy nehezebb – feladatot mondunk el, amelyek előkészítőül szolgálnak a Matematikai Diákolimpiára. A feladatok megoldásait nem kérjük beküldeni, a megoldásokat sem fogjuk ismertetni. Az érdeklődők a feladatokkal kapcsolatos kérdéseikkel forduljanak a szerkesztőséghez. Leveleikre írásban válaszolunk.

1. Csupa 1-esekből és 2-esekből álló n-jegyű számokat írunk egy táblára úgy, hogy bármely két szám legalább 3 helyen különbözzék. Bizonyítandó, hogy legfeljebb $2^n/(n+1)$ darab szám kerülhet a táblára.

2. Az $1, 2, \ldots, 3^n-1, 3^n$ számok közül válasszunk ki 2^n darabot úgy, hogy bármely két kiválasztott szám számtani közepe ne legyen a kiválasztottak között.

3. Egy 2^n hosszúságú sorozatban csak n különböző egész szám szerepel. Mutassuk meg, hogy a sorozatból kiválaszthatunk néhány egymás utáni tagot úgy, hogy szorzatuk négyzetszám legyen. Igaz-e ez az állítás, ha a sorozat csak $2n-1$ hosszú?

4. A végtelen sakktábla minden mezőjébe egy természetes számot kell írnunk úgy, hogy bármely mezőbe a vele szomszédos négy mezőben levő számok számtani közepe kerüljön. Hogyan töltsük ki a sakktáblát?

5. Hányféleképpen lehet az $1, 2, \ldots, 2n$ természetes számok közül három különbözőt kiválasztani, hogy azok
a) számtani sorozatot alkossanak;
b) egy háromszög oldalainak mértékszámai legyenek?

6. Álljon az A halmaz olyan n hosszúságú sorozatokból, melyeknek minden eleme $+1$ vagy -1. Mutassuk meg, hogy ha A-ban $2^{n/2}$-nél kevesebb sorozat van, akkor található olyan $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ sorozat, hogy minden A-beli $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ sorozatra az $(a_1c_1, a_2c_2, \ldots, a_nc_n)$ sorozat nincs A-ban.

7. Adott a síkon n pont úgy, hogy semelyik három nincs egy egyenesen. Háromszögeket választunk ki, hogy a csúcsaik a megadott pontok közül kerüljenek ki, továbbá ne legyen két háromszögnek közös oldala. Mutassuk meg, hogy legfeljebb $\frac{1}{3}\binom{n}{2}$ és legalább $\frac{1}{9}\binom{n}{2}$ ilyen háromszög létezik.

8. Készítsünk csupa 1-esekből és 2-esekből 2^{n+1} darab számot, hogy mindegyik 2^n jegyű legyen és bármely kettő legalább 2^{n-1} helyen különbözzön.

9. Az $1, 2, \ldots, n$ természetes számok közül kell néhányat, $a_1, a_2, \ldots, a_k$-t kiválasztani, hogy a

$$\pm a_1 \pm a_2 \pm \ldots \pm a_k$$

összeg az előjelek minden megválasztása esetén más legyen. Mutassuk meg, hogy k lehet nagyobb mint $(\log_2 n)$, de mindig kisebb, mint $(1+\log_2 n+\log_2\log_2 n)$.

10. Egy poliéder csúcsaiba úgy sikerült természetes számokat írnunk, hogy két csúcs között pontosan akkor fut él, ha a csúcsokba írt számok relatív prímek. Mit mondhatunk ennek alapján a poliéderről?