Ebben a rovatban havonként tíz – tíz olyan érdekes – könnyebb vagy nehezebb – feladatot mondunk el, amelyek a Matematikai Diákolimpiára előkészítőül szolgálnak. A feladatok megoldásait nem kérjük beküldeni, a megoldásokat nem fogjuk ismertetni. Az érdeklődők a feladatokkal kapcsolatos kérdéseikkel forduljanak a szerkesztőséghez. Leveleikre írásban válaszolunk.

1. Mi az $x^3(x^3+1)(x^3+2)(x^3+3)$ polinom legkisebb értéke?

2. Válasszuk meg a p és q számot úgy, hogy az x^2+px+q polinom abszolút értékének a $-1 \leqq x \leqq 1$ szakaszon felvett legnagyobb értéke a lehető legkisebb legyen.

3. Az $x^3+y^3+z^3+kxyz$ polinom k-nak mely értékeire osztható $(x+y+z)$-vel?

4. Legyen $f(x)$ egy polinom. Igazoljuk: ha az $f(x^n)$ polinomnak (n pozitív egész szám) osztója $x-1$, akkor x^n-1 is osztója.

5. Igazoljuk, hogy az

$$1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}+\frac{n^2+n}{2}x^n$$

függvény minden zérushelye a $-1<x<1$ szakaszon van.

6. *a)* Állapítsuk meg az összes olyan $f(x)$ polinomot, amelyre $xf(x-1)=(x-100)f(x)$.

b) Van-e olyan $f(x)$ polinom, amelyre $xf(x-1)=(x+1)f(x)$?

7. Az

$$\left(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n\right)^2-x^n$$

kifejezés azonosan egyenlő két polinom szorzatával. Melyek azok?

8. Bizonyítandók:

a) Ha egy $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots$ egész együtthatós n-edfokú polinom értéke minden egész helyen többszöröse egy k egész számnak, akkor $n!a_n$ is többszöröse k-nak.

b) Tetszőleges n, c, k pozitív egész számokhoz, amelyekre $n!c$ többszöröse k-nak, van olyan $cx^n+\ldots$ egész együtthatós n-edfokú polinom, amelynek értéke minden egész helyen többszöröse k-nak.

9. Ha a, b, c, d egész számok úgy, hogy ad páratlan és bc páros, akkor az ax^3+bx^2+cx+d polinomnak nem lehet három racionális zérushelye.

10. Bizonyítandó, hogy az

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$$

polinomnak nincs legalább kétszeres zérushelye.