Ezzel a közleménnyel befejezzük sorozatunkat. Az előző közlemények helye (kötet; szám; oldal sorrendben): 53; 2. 49–52. 54; 1. 1–3. 54; 5. 193–97. 55; 2. 55–58. 56; 1. 1–4. A sorozat célja annak a megmutatása volt, hogy miképpen lehet kis lépéseken keresztül nehéz tételek bizonyításához eljutni. Egyben azt is szemléltette, hogy egyes tételek gyökerei a matematika különböző ágaiba nyúlnak bele.

Nem tudunk a sorozat eredményességéről beszámolni, mert nagyon kevés megoldás érkezett be a szerkesztőséghez. Ennek minden bizonnyal az is oka volt, hogy a közlemények elég nagy időközönként jelentek meg, és a sorozat két évig húzódott el. Előző közleményünkre mindössze *Hajnal Péter* és *Szabó Sándor* küldtek be megoldást, ők 100–100 Ft-os, *Varga Lívia* pedig korábbi megoldásaiért 50 Ft-os könyvutalványt kap a szerkesztőségtől.[1]

Az V. részben kitűzött feladatok megoldása

20. feladat. Legyen $\varepsilon > 1$ a $Z[\sqrt{D}]$-nek olyan eleme, amelyre $N(\varepsilon) = 1$. Bizonyítsuk be, hogy a 17. feladatban értelmezett ε_1 számhoz található olyan k természetes szám, amelyre

$$(\varepsilon_1)^k \le \varepsilon < (\varepsilon_1)^{k+1}.$$

Megoldás. A 17. feladat szerint $\varepsilon_1 > 1$. A 16. feladat alapján ekkor $\varepsilon_1 \ge 1 + 1 \cdot \sqrt{D} > 2$. Így $\varepsilon_1^n > 2^n > n$ alapján létezik olyan minimális $k \ge 0$ egész szám, amire $(\varepsilon_1)^{k+1} > \varepsilon$. k minimalitása azt jelenti, hogy $(\varepsilon_1)^k \le \varepsilon$; és így a feladat állítását bebizonyítottuk.

21. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha ε olyan eleme $Z[\sqrt{D}]$-nek, amelyre $N(\varepsilon) = 1$, akkor valamilyen k egész számra teljesül és az $\varepsilon = \varepsilon_k$ az $\varepsilon = -\varepsilon_k$ egyenlőségek valamelyike, ahol ε_k a 18. feladatban adott definíció szerint egyenlő $(\varepsilon_1)^k$-nal.

Megoldás. $\varepsilon = 1$ vagy $\varepsilon = -1$ esetén $k = 0$ nyilván megfelel. Legyen a továbbiakban először $\varepsilon > 1$. A 20. feladat állítása szerint létezik olyan nemnegatív k egész szám, amire $(\varepsilon_1)^k \le \varepsilon < (\varepsilon_1)^{k+1}$. Ebből $\varepsilon_1 \cdot \overline{\varepsilon}_1 = 1$ alapján

$$1 = (\varepsilon_1)^k (\overline{\varepsilon}_1)^k \le \varepsilon \cdot (\overline{\varepsilon}_1)^k < (\varepsilon_1)^{k+1} (\overline{\varepsilon}_1)^k = \varepsilon_1$$

következik. Mivel $N\big(\varepsilon \cdot (\varepsilon_1)^k\big) = 1$, ezért a 17. feladat állítása miatt $\varepsilon(\overline{\varepsilon}_1)^k = 1$ lehet csak. Ebből pedig

$$\varepsilon = \varepsilon\big[(\overline{\varepsilon_1})^k (\varepsilon_1)^k\big] = \big[\varepsilon(\overline{\varepsilon}_1)^k\big](\varepsilon_1)^k = (\varepsilon_1)^k$$

következik. Ha most $\varepsilon \ne \pm 1$ tetszőleges, akkor a 15. feladat figyelembevételével azt kapjuk, hogy van olyan ε', amire $N(\varepsilon') = 1$, $\varepsilon' > 1$, és az

$$\varepsilon = -\varepsilon', \qquad \varepsilon = -\overline{\varepsilon}', \qquad \varepsilon = \overline{\varepsilon}' \qquad \text{és} \qquad \varepsilon = \varepsilon'$$

esetek valamelyike áll fenn. Már beláttuk, hogy $\varepsilon' = \varepsilon_1^k = \varepsilon_k$ alkalmas k természetes számmal és $(\overline{\varepsilon}_k) = \varepsilon_{-k}$ a 18. feladat állítása szerint, ezért a fenti négy esetnek megfelelően, rendre az alábbi lehetőségeket kapjuk:

$$\varepsilon = -(\varepsilon_k), \qquad \varepsilon = -(\varepsilon_{-k}), \qquad \varepsilon = \varepsilon_{-k} \qquad \varepsilon = \varepsilon_k.$$

Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

22. feladat. Legyen a 18. feladatban szereplő ε_k-ra $\varepsilon_k = p_k + q_k\sqrt{D}$, nem negatív k esetén. Bizonyítsuk be, hogy az

$$x^2 - Dy^2 = 1 \tag{P}$$

Pell-féle egyenlet összes (egész) megoldásai:

$$x = \pm p_k, \qquad y = \pm q_k.$$

Megoldás. A 18. feladat állítása szerint a felsorolt számok valóban megoldást adnak. A 19. feladat állítása szerint ezek a megoldások különbözőek. A 21. feladatban pedig azt láttuk be, hogy a (P) egyenletnek nincs több (egész) megoldása.

23. feladat. Legyen az $\alpha = a + b\sqrt{D} \in Z\big[\sqrt{D}\big]$ számra $\alpha > 1$ és $N(\alpha) = k$.
Bizonyítsuk be, hogy ekkor létezik olyan $\alpha_0 = a_0 + b_0\sqrt{D}$, amelyre $1 < \alpha_0 < \varepsilon_1$ és $\alpha = \alpha_0(\varepsilon_1)^k$ valamely nem negatív k egész számmal, ahol ε_1 a 17. feladatban definiált szám. (Igaz-e, hogy mind a_o, mind b_o pozitívak?)

Megoldás. Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy a szöveg nem volt pontos. A félreértés elkerülése végett inkább az $N(\alpha) = n$ jelölést használjuk; és azt is fel kell tenni, hogy $n \ne 1$. Ekkor a 20. feladat megoldásánál használt módszerrel adódik, hogy alkalmas k nem negatív egész számra teljesül, hogy

$$(\varepsilon_1)^k \le \alpha < (\varepsilon_1)^{k+1}.$$

[1] A jutalmakat postán küldjük ki. (Szerk.)

A 21. feladatban látott megoldási módszert alkalmazva, az $\alpha_0 = \alpha \cdot (\overline{\varepsilon}_1)^k$ számra a következőket kapjuk:

1. $1 \leq \alpha_0 < \varepsilon_1$,
2. $N(\alpha_0) = N(\alpha) \cdot N(\overline{\varepsilon}_1)^k = N(\alpha) = n$.
3. $\alpha = \alpha \cdot \left[(\overline{\varepsilon}_1)^k \cdot (\varepsilon_1)^k\right] = \left[\alpha \cdot (\overline{\varepsilon}_1)^k\right](\varepsilon_1)^k = \alpha_0 \cdot (\varepsilon_1)^k$.

Ezzel már majdnem meg is kaptuk a megoldást; csupán azt kellene még bizonyítani, hogy $\alpha_0 \neq 1$. Ez viszont a 2. pont szerint azonnal következik az $n \neq 1$ feltételből.

A feladat zárójelben feltett kérdése az volt, hogy ha $\alpha_0 = a_0 + b_0\sqrt{D}$, akkor következik-e a_0 és b_0 pozitivitása? Erre a kérdésre a legegyszerűbben úgy válaszolhatunk, hogy egy ellenpéldát adunk (ilyen létezik). Mi azonban ennél többet bizonyítunk be; mégpedig azt, hogy tetszőleges D mellett csak véges sok olyan $\alpha_0 = a_0 + b_0\sqrt{D}$ létezik, amire $1 < \alpha_0 < \varepsilon_1$ és $a_0 > 0$, $b_0 > 0$; de végtelen sok $\alpha_0 = a_0 + b_0\sqrt{D}$ mellett igaz az, hogy a_0 és b_0 ellenkező előjelűek és $1 < \alpha_0 < \varepsilon_1$.

Az első állítás nyilvánvaló. Hiszen ha $\varepsilon_1 = p_1 + q_1\sqrt{D}$, akkor $1 < \alpha_0 < \varepsilon_1$ esetén $\alpha_0 = a_0 + b_0\sqrt{D}$ csak akkor elégíti ki az $a_0 > 0$, $b_0 > 0$ feltételt, ha $a_0 < \varepsilon_1$ és $b_0 < \dfrac{\varepsilon_1}{\sqrt{D}}$. Ez pedig csak véges sok esetben lehet.

Tekintsünk most tetszőleges b_0 egész számot. Mivel $\varepsilon_1 > 2$, ezért $\varepsilon_1 - 1 > 1$, azaz $(\varepsilon_1 - b_0\sqrt{D}) - (1 - b_0\sqrt{D}) > 1$ is teljesül. Ezért létezik olyan a_0 egész szám, amelyre $1 - b_0\sqrt{D} \leq a_0 < \varepsilon_1 - b_0\sqrt{D}$, amiből

$$1 \leq a_0 + b_0\sqrt{D} < \varepsilon_0$$

következik. Ha $b_0 \neq 0$, akkor a bal oldalon nem lehet egyenlőség. Mivel b_0 egyébként tetszőleges, ezért valóban végtelen sok α_0 tesz eleget a kívánt feltételnek.

Láttuk, hogy ezek közül csak véges sok elégítheti ki az $a_0 > 0$, $b_0 > 0$ feltételt, és $1 < \alpha_0$ miatt $a_0 < 0$, $b_0 < 0$ egyszerre nem teljesülhet. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

24. feladat. Hogyan állítható elő az $x^2 - Dy^2 = k$ egyenlet összes egész $(a,\ b)$. megoldása?

Megoldás. A feladat itt is félreérthető volt; csupán azt akartuk kérdezni, hogy milyen alakban írhatók fel a megoldások, és nem azt, hogy milyen eljárás szükséges az előállításukhoz. Ennek megfelelően válaszolunk a kérdésre.

A 23. feladat állítását felhasználva (a, b) akkor és csak akkor megoldás, ha az $\alpha = a + b\sqrt{D}$ szám $\alpha = \alpha_0(\varepsilon_1)^n$ vagy $\alpha = -\alpha_0(\varepsilon_1)^n$ alakú, ahol n egész szám és $1 < \alpha_0 < \varepsilon_1$. Az előző feladat megoldásánál láttuk, hogy $N(\alpha_0) = N(\alpha)$ is teljesül. Így tehát meg kell keresni azokat az $\alpha_0 \in Z\left[\sqrt{D}\right]$ számokat, amelyekre $N(\alpha_0) = k$, $1 < \alpha_0 < \varepsilon_1$, és ekkor $\alpha_0(\varepsilon_1)^n$, $-\alpha_0(\varepsilon_1)^n$ szolgáltatják az összes megoldást.

Néhány szó $Z\sqrt{D}$-ről és a gyökvonásról

Mindenekelőtt szóljunk néhány szót az ε_1 megtalálásáról. A 30-ig terjedő prímszámoknál ezek:

$$3 + 2 \cdot \sqrt{2};\quad 2 + 1 \cdot \sqrt{3};\quad 9 + 4 \cdot \sqrt{5};\quad 8 + 3 \cdot \sqrt{7};\quad 10 + 3 \cdot \sqrt{11};\quad 649 + 180 \cdot \sqrt{13};$$
$$33 + 8 \cdot \sqrt{17};\quad 170 + 39 \cdot \sqrt{19};\quad 24 + 5 \cdot \sqrt{23};\quad 9801 + 1820 \cdot \sqrt{29}.$$

Különösen sok próbálkozás szükséges – még számítógépet igénybe véve is – a $\sqrt{13}$ és a $\sqrt{29}$ esetében. De ezeket is elő lehet állítani ügyesen. Ha például olyan α-t tudunk találni, amelyre $N(\alpha) = -1$, akkor a 23. feladat állítása alapján feltehető, hogy $1 < \alpha < \varepsilon_1$. Mivel $N(\alpha^2) = \big(N(\alpha)\big)^2 = 1$ és $1 < \alpha^2 < (\varepsilon_1)^2$, ezért $\alpha^2 = \varepsilon_1$. Könnyen látható, hogy ilyen α-t nem mindig találhatunk. Például $D = 4k + 3$ alakú számoknál sohasem. Az sem ismeretes, hogy milyen $4k + 1$ alakú D prímszám esetén van ilyen α. Most felírjuk néhány prím D-re a legkisebb ilyen α-t:

$$1 + \sqrt{2},\quad 2 + \sqrt{5},\quad 18 + 5\sqrt{13},\quad 4 + \sqrt{17},\quad 70 + 13\sqrt{29},\quad 6 + \sqrt{37},$$
$$32 + 5\sqrt{41},\quad 182 + 25\sqrt{53},\quad 29\,718 + 3805\sqrt{61},\quad 1068 + 125\sqrt{73},$$
$$500 + 53\sqrt{89},\quad 5604 + 569\sqrt{97}.$$

Ezeknek az előállítása is igen sok időt vett volna igénybe, de néha még itt is lehet ügyeskedni. Előfordulhat ugyanis (csak ha $D = 8k+5$ alakú prím), hogy olyan számok vannak a $Q\left[\sqrt{D}\right]$-ben, amelyek elemei $Z\left[\sqrt{D}\right]$-nek, de valamelyik hatványuk (esetünkben a köbük) éppen a fenti minimális α-t állítja elő. A fentiek közül ilyenek:

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2},\qquad \frac{3 + \sqrt{13}}{2},\qquad \frac{5 + \sqrt{29}}{2},\qquad \frac{7 + \sqrt{53}}{2},\qquad \frac{39 + 5\sqrt{61}}{2}.$$

Látható, hogy ezek éppen a „legkellemetlenebb” esetekben segítettek. Egyébként a $\dfrac{39 + 5\sqrt{61}}{2}$ előállítása egy programozható kézi kalkulátoron néhány másodpercet vett igénybe (a program beírása legfeljebb 5 perc volt). A $29\,718 + 3805\sqrt{61}$ meghatározására már közel egy óra kellett. A $D = 61$ esetében

$$\varepsilon_1 = 1\,766\,319\,049 + 226\,153\,980 \cdot \sqrt{D},$$

aminek a meghatározásához mintegy 6 és fél év kellene (ha a kézi kalkulátoron elég hely volna).

Az előzőekben természetesnek látszott, hogy a $Z[\sqrt{D}]$ és a $Q[\sqrt{D}]$ hasonló kapcsolatban állnak, mint Z (az egész számok halmaza) és Q (a racionális számok halmaza). Más szóval a $Z[\sqrt{D}]$-beli számokat az egészek általánosításának tekinthetjük. Mint láttuk, ez nem így van, mert ha egy racionális szám egy hatványa egész, akkor az eredeti szám is egész. Éppen ezért szoktak a $Z[\sqrt{D}]$ helyett egy bővebb $Q[\sqrt{D}]$-beli részhalmazt tekinteni egészeknek. Be lehet bizonyítani, hogy ez pontosan olyan D-k esetén lehetséges, amelyek nem négyzetszámok és $4k+1$ alakúak. Ilyenkor az $a+b\sqrt{D}$ alakú számok helyett az $a+b\dfrac{1+\sqrt{D}}{2}$ alakú számokat vizsgálják ($a,\ b \in Z$). Ennek az az oka, hogy az $\alpha = a+b\dfrac{1+\sqrt{D}}{2}$ gyöke az $x^2-(2a+b)x+\left(a^2+ab+b^2\dfrac{1-D}{4}\right)=0$ másodfokú egyenletnek; itt 1). a másodfokú tag együtthatója 1, 2). az összes együttható egész (mivel $D=4k+1$ alakú!). A fenti számhalmazt $Z\left[\dfrac{1+\sqrt{D}}{2}\right]$-vel jelöljük.

$Z[\sqrt{D}]$-ben, illetve a $Z\left[\dfrac{1+\sqrt{D}}{2}\right]$-ben beszélhetünk az oszthatóságról; sőt bizonyos esetekben az egyértelmű prímtényezős felbontás megfelelője is igaz. Az egész számoknál az a és $-a$ az oszthatóságnál hasonlóan viselkedtek, hiszen $(a \neq 0)$ esetben $a|(-a)$ és $(-a)|a$ is igaz; valamint azt is tudjuk, hogy $a|b$ és $b|a$ esetén vagy $a=b$ vagy $a=-b$ teljesül. A $Z[\sqrt{D}]$, illetve a $Z\left[\dfrac{1+\sqrt{D}}{2}\right]$ esetben ez már nem így van. Könnyen látható ugyanis, hogy $\alpha|\beta$ és $\beta|\alpha$ pontosan akkor teljesülnek, ha $\beta=\varepsilon\cdot\alpha$, ahol $N(\varepsilon)=1$ és $\varepsilon \in Z[\sqrt{D}]$; ill. $\varepsilon \in Z\left[\dfrac{1+\sqrt{D}}{2}\right]$.
Nos az ilyen ε-ok éppen a Pell-féle egyenlet megoldásai.

Ahogy a Pell-féle egyenlet megoldásánál a racionális számokkal való approximációt felhasználtuk, fordítva, az approximációnál segítségünkre lehet a Pell-féle egyenlet megoldásának az ismerete.

Legyen $\varepsilon = a+b\sqrt{D}$ olyan, hogy $a>0,\ \ b>0$ és $a,\ b$ az

$$x^2-Dy^2=1 \tag{P}$$

gyökpárja. Ebből

$$(a-b\sqrt{D})(a+b\sqrt{D})=1$$

következtében

$$\frac{a}{b}-\sqrt{D}=\frac{1}{(a+b\sqrt{D})b}>0$$

adódik. Mivel a és b „elég nagyok”, ezért az $\eta=\dfrac{1}{(a+b\sqrt{D})b}$ „elég kicsi”. Így $\dfrac{a}{b}$ jó közelítő értéke $\sqrt{D}$-nek. Ha most ε^2-t kiszámítjuk, akkor

$$\overline{\varepsilon}=a-b\sqrt{D}=\eta b$$

alapján

$$(\overline{\varepsilon})^2=a_1-b_1\sqrt{D}=\eta^2b^2.$$

Mivel $a_1=a^2+b^2D$ és $b_1=2ab$, ezért az

$$\frac{a_1}{b_1}-\sqrt{D}=\frac{\eta^2b^2}{2ab}=\frac{\eta^2b}{2a}$$

összefüggéshez jutunk. Tekintettel arra, hogy $a>b$, ezért

$$\frac{a_1}{b_1}-\sqrt{D}=\eta_1<\frac{\eta^2}{2}\,.$$

Más szóval az új közelítő értéknél az eltérés kisebb, mint az előző eltérés négyzetének a fele.

Például $\sqrt{10}$ meghatározásánál kiindulhatunk a $3^2-1^2\cdot 10=-1$ összefüggésből. Ebből azt kapjuk, hogy

$$3-\sqrt{10}=\frac{-1}{3+\sqrt{10}},$$

illetve

$$\left|3-\sqrt{10}\right|=\frac{1}{3+\sqrt{10}}<\frac{1}{6}\,.$$

A $(3+\sqrt{10})^2=19+6\sqrt{10}$ összefüggésből

$$\frac{19}{6}-\sqrt{10}<\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{6^3}<\frac{1}{200}.$$

Így $\sqrt{10}=3{,}16$ az utolsó jegyben is pontos. Még egy lépést téve azt kapjuk, hogy $\dfrac{721}{228}-\sqrt{10}<\left(\dfrac{1}{6}\right)^6\cdot\dfrac{6}{2\cdot 19}=\dfrac{1}{2\cdot 19\cdot 6^5}$, és $\dfrac{1}{2\cdot 19\cdot 6^5}<\dfrac{4}{10^6}$ következtében

$$3{,}162\,276<\sqrt{10}<3{,}162\,281$$

adódik. (Egyébként 9 jegyre $\sqrt{10}\approx 3{,}162\,277\,660$.)