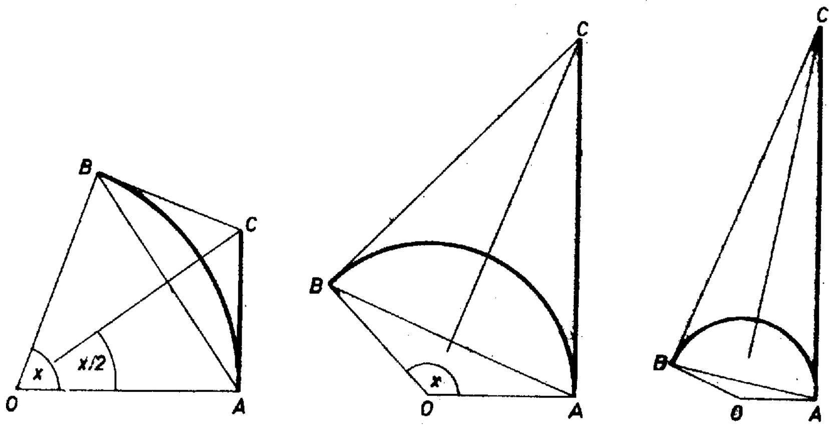
I. megoldás. Jelöljük az O csúcsú, x nagyságú szög szárainak az O körüli, egységnyi sugarú k körrel közös pontját A-val, ill. B-vel, és messe egymást k-nak A-beli és B-beli érintője C-ben. Ekkor OC felezi a szöget, és azt kell bizonyítanunk, hogy az AC érintőszakasz kisebb, mint k-nak (rövidebbik) AB íve.



Elég azt belátnunk, hogy AC – és a vele egyenlő BC – még az AB húrnál is rövidebb. E három szakasz az ABC egyenlő szárú háromszöget alkotja, így a velük szemben fekvő szögekre az

$$ABC\sphericalangle = BAC\sphericalangle < ACB\sphericalangle \tag{2}$$

egyenlőtlenség egyenértékű állításunkkal.

Mármost az $OACB$ négyszögből nyilvánvalóan $ACB\sphericalangle = \pi - x$, és mint merőleges szárú hegyes szögek a (2)-beli első szög egyenlő $BOC\sphericalangle = \dfrac{x}{2}$-vel, tehát (2) teljesül, amíg

$$\frac{x}{2} < \pi - x, \text{ azaz } x < \frac{2}{3}\pi.$$

Azt kaptuk tehát, hogy a tg $(x/2) < x$ egyenlőtlenség valamivel tágabb feltétel mellett is érvényes, mint amely mellett a feladat a bizonyítást követeli.

Bugyi Márta (Csongrád, Batsányi J. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. A (2)-ben megengedhettük volna a BAC és ACB szögek egyenlőségét is, hiszen határozottan $\widehat{AB} > \overline{AB}$. Egyébként könnyű látni a táblázatokból, hogy a tg $(x/2) = x$ egyenlőség közelítőleg $x = 2{,}33 (= 133{,}5^\circ)$-nál következik be.

2. Mivel $AB = 2\sin(x/2)$, bizonyításunkat így is mondhatjuk:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}} < 2\sin\frac{x}{2}$$

mindaddig teljesül, amíg

$$x > 0 \quad \text{és} \quad \cos\frac{x}{2} > \frac{1}{2},$$

azaz

$$0 < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{3}.$$

Besenyei Lajos (Eger, Gárdonyi G. Gimn., IV. o. t.)

II. megoldás. A feladat föltétele alapján $\cos x \geqq 0$, így ismert azonosságot és egyenlőtlenségeket alkalmazva

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x} \leqq \sin x < x.$$

A második lépésben alkalmazott becslés miatt itt nem olvashatjuk ki az állítás érvényességének kiterjesztését.

III. megoldás. Vizsgáljuk az $f(x) = x - \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ függvény változását a $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ intervallumban. A függvény deriváltja

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2\cos^2\dfrac{x}{2}},$$

pozitív az intervallum belsejében, tehát f szigorúan monoton növekedő. Mivel $f(0)=0$, másrészt f az intervallum jobb végpontjában is folytonos, azért

$$f(x)>0, \quad \text{ha} \quad 0<x \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Ezzel bebizonyítottuk az állítást.

Bogsch Imre (Budapest, Eötvös J. Gimn., IV. o. t.)