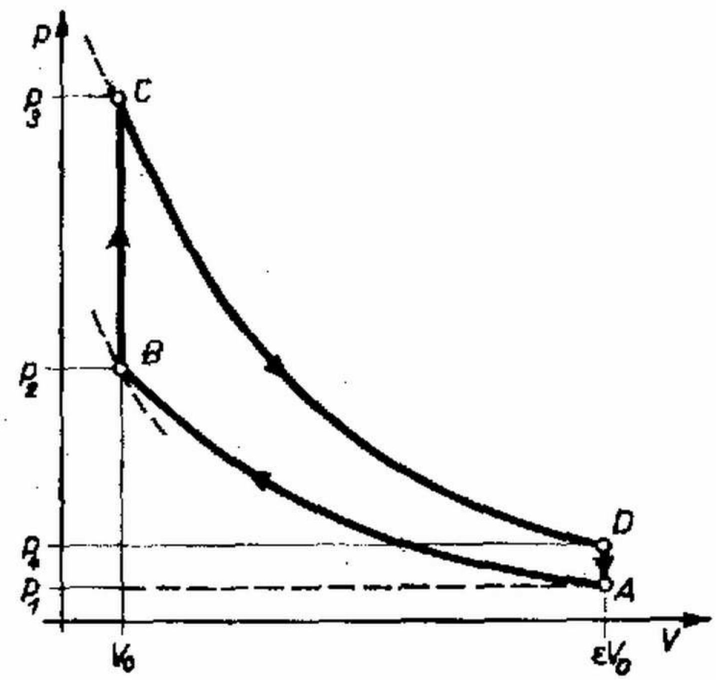
1. *Egy négyütemű motor kompresszióviszonya $\varepsilon = 9{,}5$. A motor 27 °C hőmérsékletű, εV_0 térfogatú levegőt és benzingőzt szív be 100 kPa nyomáson (1. ábra). Ezután sűrítés következik, az állapotábrán az A pontból a B pontba adiabatikusan jutunk el ($x = 1{,}4$). A robbanáskor ($B - C$) a nyomás megkétszereződik. A dugattyú kilökése közben ($C - D$) a gázkeverék adiabatikusan terjed ki εV_0 térfogatra. A kipufogószelep kinyílásakor a nyomás visszaesik a kezdeti 100 kPa értékre. A kompresszióviszony a henger legnagyobb és legkisebb térfogatának az arányát jelenti.*

a) *Határozzuk meg a nyomás és hőmérséklet értékeit az A, B, C és D állapotokban!*

b) *Mennyi a körfolyamat elméleti hatásfoka?*



1. ábra

Megoldás. Az adiabatikus állapotváltozás egyenlete ideális gázra

$$TV^{x-1} = \text{állandó}.$$

a) Az A állapotban a nyomás $P_1 = 100$ kPa, a térfogat εV_0, a hőmérséklet $T_1 = 300$ K; a B állapot jellemzői p_2, V_0, T_2. Az adiabata egyenlete

$$T_1(\varepsilon V_0)^{x-1} = T_2 V_0^{x-1},$$

amiből $T_2 = 738{,}3$ K. Az ideális gáz állapotegyenletéből (pV/T = állandó) meghatározhatjuk a B állapotban levő gáz nyomását:

$$p_2 = 2{,}34 \text{ MPa}.$$

A C állapotban a nyomás $p_3 = 2p_2 = 4{,}68$ MPa, a térfogat V_0, a hőmérsékletet pedig az állapotegyenletből fejezhetjük ki: $T_3 = 1476{,}6$ K.

A D állapot paramétereit (p_4, εV_0, T_4) ismét az adiabatikus állapot. változás egyenletéből, illetve az állapotegyenletből kaphatjuk meg: $T_4 = 600$ K; $p_4 = 2$ kPa.

b) A hatásfokot megadó tört nevezője a $B - C$ lépésben felvett hő, mert ezt kell az üzemanyag elégetésével biztosítani. A felvett hő a gáz energiájának növekedésével egyenlő, mert a térfogat változatlan, és így nincs munkavégzés. Tehát a felvett hő $c_v m(T_3 - T_2)$. A mechanikai munka alakjában hasznosított energia a $B - C$ lépésben felvett és a $D - A$ lépésben visszaadott hő különbsége:

$$c_v m(T_3 - T_2) - c_v m(T_4 - T_1) = c_v m(T_1 + T_3 - T_2 - T_4).$$

A hatásfok:

$$\eta = \frac{c_v m(T_1 + T_3 - T_2 - T_4)}{c_v m(T_3 - T_2)} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}.$$

Mivel $T_3 = 2T_2$ és $T_4 = 2T_1$, a hatásfok egyszerűen

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}.$$

Az $A-B$ folyamatra felírt adiabata egyenletéből $T_1/T_2 = \varepsilon^{1-x}$, tehát a négyütemű benzinmotor hatásfoka:

$$\eta = 1 - \varepsilon^{1-x}.$$

A hatásfok csak a kompresszióviszonytól függ, azaz a hatásfokra vonatkozó *b)* kérdésre az *a)* alatti adatok kiszámítása nélkül is felelhetünk.

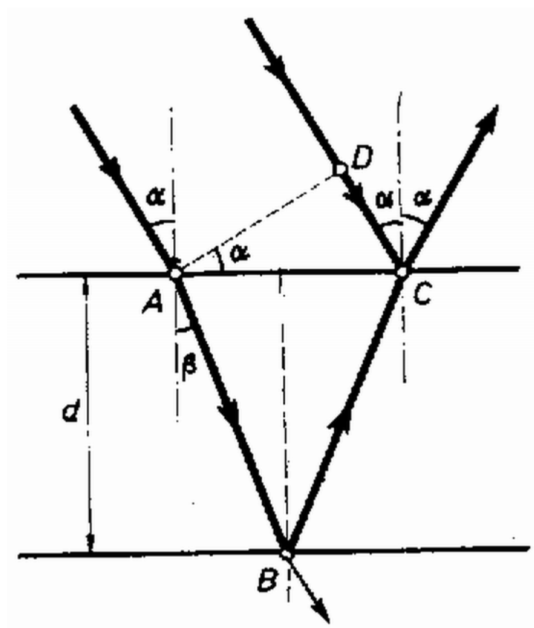
Számadatainkkal $\eta = 0{,}59 = 59\%$. A valóságos hatásfok alig több, mint ennek a fele, mert sok hő távozik el a körfolyamatban való részvétel nélkül.

2. *Egy szappanhártyát $\alpha = 30°$-os beesési szögben fehér fénnyel világítunk meg. A visszavert fényt túlnyomó részben $\lambda_0 = 0{,}5$ μm hullámhosszú élénk zöld színben látjuk.*

a) *Mennyi a hártya lehetséges legkisebb vastagsága?*

b) *Milyen színűnek látszik ez a hártya merőleges irányból? A folyadék törésmutatója $n = 1{,}33$.*

Megoldás. *a)* A rétegbe bemenő, az A pontban megtört fény egy része B-ben visszaverődik, C-ben a levegőbe kilépve ismét megtörik, és az elég messze levő szemünkbe jut (2. ábra). A fényforrásból érkező DC sugár egy része is visszaverődik és az előbbi sugárral együtt jut a szemünkbe.



2. ábra

Az AD síkba az egész sugárnyaláb egyező fázissal érkezik. Az a kérdés, mekkora az útkülönbség, illetve a fáziskülönbség az alsó és felső határfelületekről érkező sugarak között, mert ettől függ, hogy az interferencia által erősítés vagy gyengítés jön-e létre, és a fehér fény különböző hullámhosszúságú fényei közül teljes intenzitással mi marad meg.

Az alul visszaverődő fénysugár útja A-tól C-ig $\overline{AB} + \overline{BC} = 2d/\cos\beta$. A közegben a hullámhossz λ_0/n, tehát ezen az úton az A-tól C-ig elférő hullámok darabszáma:

$$\frac{2d}{\lambda_0(\cos\beta)/n} = \frac{2dn}{\lambda_0 \cos\beta}.$$

A felül visszaverődő fénysugár útja D-től C-ig:

$$\overline{DC} = \overline{AC}\ \sin\ \alpha = 2d\ \mathrm{tg}\ \beta\ \sin\ \alpha =$$
$$= 2d\ \sin\beta\ \sin\ \alpha/\cos\ \beta.$$

Ezen a távolságon a λ_0 hullámhosszból $2d\ \sin\ \beta\ \sin\ \alpha/(\lambda_0\ \cos\ \beta)$ darab fér el, de a nagyobb törésmutatójú anyagon történő visszaverődéskor $180°$-os fázisugrás történik, tehát a DC távolságon elférő hullámok száma:

$$\frac{2d\ \sin\ \beta\ \sin\ \alpha}{\lambda_0\ \cos\ \beta} + \frac{1}{2}.$$

Erősítés akkor jön létre, ha a hullámok számának különbsége valamilyen k egész szám:

$$k = \frac{2dn}{\lambda_0\ \cos\ \beta} - \frac{2d\ \sin\ \beta\ \sin\ \alpha}{\lambda_0\ \cos\ \beta} - \frac{1}{2} = \frac{2dn}{\lambda_0\ \cos\ \beta}(1 - \sin^2\ \beta) - \frac{1}{2} = \frac{2dn\ \cos\ \beta}{\lambda_0} - \frac{1}{2} =$$
$$= \frac{2d}{\lambda_0}\sqrt{n^2 - \sin^2\ \alpha} - \frac{1}{2}.$$

Ennek átalakítása után az erősítés feltétele:

$$\frac{4d}{\lambda_0}\sqrt{n^2-\sin^2\ \alpha}=2k+1.$$

A törésmutatótól és a geometriai adatoktól függ, hogy mely hullámhosszra következik be a legnagyobb erősítés. Az ezzel szomszédos hullámhosszúságú fények sem oltódnak ki egészen, csak gyengülnek, tehát nem kapunk monokromatikus fényt. Ha k növekszik, a szín mindig kevésbé teltebb lesz, mert az egyik rendben való erősítést egy másik rendben történő gyengítés lerontja. Valamelyest vastagabb lemeznél szürkét kapunk. Ezért van az, hogy a „vékony lemezek színei" csak vékony lemezeknél látszanak. Feladatunk élénk zöldet említ és a legvékonyabb hártya iránt érdeklődik, tehát $k=0$ veendő és a rétegvastagság:

$$d=\frac{\lambda_0}{4\sqrt{n^2-\sin^2\ \alpha}}=0,101\mu\text{m}.$$

Megjegyzés. Ez a hártya olyan vékony, hogy egy 2 cm · 3 cm méretű keretbe férő tömege csak 0,06 mg lenne, a szokásos analitikai mérleggel nem volna megbízhatóan lemérhető.

b) Merőleges beesésnél, $k=0$ esetében a legjobban erősített hullámhossz $\lambda_b=4d\sqrt{n^2-\sin^2\ 0}=4dn$ volna. Az előbbi d-értéket felhasználva:

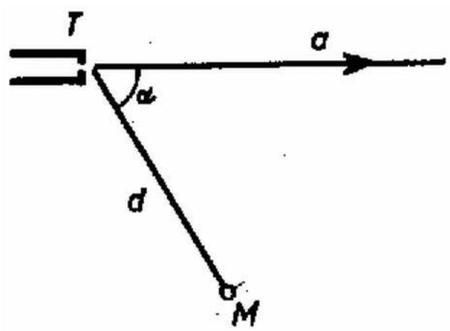
$$\lambda_b=\lambda_0\cdot\frac{n}{\sqrt{n^2-\sin^2\ \alpha}}=\frac{\lambda_0}{\cos\ \beta}.$$

d-től függetlenül így lehet az α-hoz tartozó λ_0-ból a merőleges beeséshez tartozó λ_b-t kiszámítani. A mi esetünkben $\lambda_b=1{,}079\ \lambda_0=0{,}540\ \mu$m, ami sárgásabb árnyalatú zöld színt jelent. De nemcsak a szemünket kell bevinni a beesési merőlegesbe, hanem lehetőleg a fényforrást is. A vékony lemezek színeinek vizsgálatakor éppen ezért nagy felületű, diffúz fényforrás célszerű, mint amilyen a borús ég, amikor eső után nézzük a pocsolyán az olajfoltokat.

3. *Egy elektronágyú* $U=1000$ V *feszültséggel gyorsított elektronokat bocsát ki az „a" egyenes irányában (3. ábra). Az ágyútól* $d=5$ cm *távolságban,* $\alpha=60°$*-os irányban levő* M *céltárgyat akarjuk eltalálni. Ennek érdekében* B *indukciójú homogén mágneses teret alkalmazunk. Mekkora legyen ennek az erőssége,*

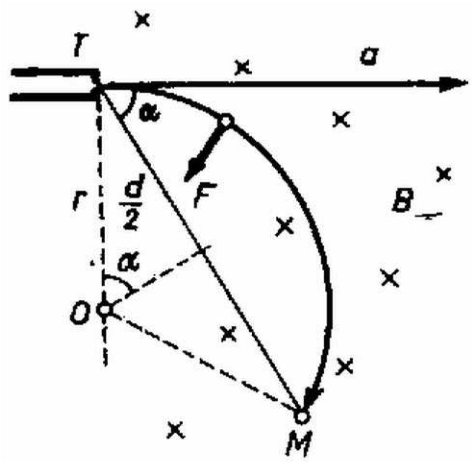
a) *ha a mágneses térerősség merőleges az „a" egyenes és az* M *pont által meghatározott síkra;*

b) *ha a mágneses térerősség párhuzamos a* TM *iránnyal? Az elektron töltése* $Q=1{,}6\cdot10^{-19}$ C, *tömege* $m=9{,}11\cdot10^{-31}$ kg.



3. ábra

Megoldás. *a)* A v sebességgel repülő elektront a merőleges irányú, B indukciójú homogén mágneses tér r sugarú körpályára tereli. E mozgáshoz szükséges mv^2/r erőt a BvQ nagyságú Lorentz-erő szolgáltatja. Homogén, állandó mágneses tér nem képes az elektron sebességének nagyságát megváltoztatni, mert az erő mindig merőleges a sebességre. A mi esetünkben a körpálya sugara a 4. ábra szerint $r=d/(2\ sin\ \alpha)$.



4. ábra

Az elektronágyúból kirepülő elektron sebessége $mv^2/2 = UQ$ alapján a $v = \sqrt{2UQ/m}$. A Lorentz-erő figyelembevételével

$$\frac{mv^2}{r} = BvQ.$$

Innen a szükséges mágneses indukció:

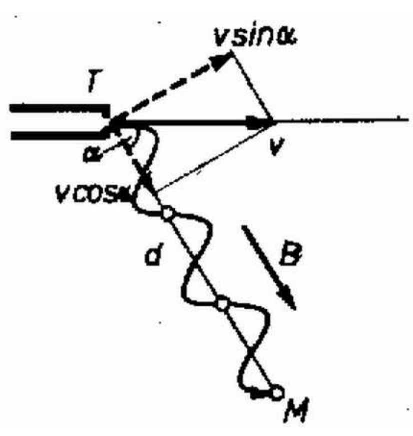
$$B = \frac{mv}{rQ}.$$

Felhasználva a sugár geometriai kifejezését és a sebesség értékét:

$$B = \frac{2\ \sin\ \alpha}{d}\sqrt{\frac{2Um}{Q}}.$$

Számadatainkkal $B = 0{,}0037$ tesla.

b) Ebben az esetben az elektronágyúból kirepülő elektron sebességét felbontjuk a B mágneses indukció irányába eső $v\ \cos\ \alpha$ és az erre merőleges $v\ \sin\ \alpha$ összetevőre (5. ábra).



5. ábra

A $v\ \cos\ \alpha$ összetevőre hatástalan a mágneses tér. Ezzel a sebességgel az elektron $d/(v\ \cos\ \alpha)$ idő alatt ér el az M célba.

Vizsgáljuk a mozgást olyan koordináta-rendszerből, amely $v \cdot \cos\ \alpha$ sebességgel halad a TM irányban. Az elektron ebben a koordináta-rendszerben $v \cdot \sin\ \alpha$ sebességgel körpályán mozog, amelynek sugara $mv^2\ \sin^2\ \alpha/r = BQv\ \sin\ \alpha$ alapján

$$r = mv\ \sin\ \alpha/(QB).$$

(Az elektron valójában spirálist ír le.) M eltalálása akkor sikerül, ha az elektron k egész számú kört ír le az M-be való érkezés $d/(v\ \cos\ \alpha)$ ideje alatt. A kör kerülete $2\pi r = 2\pi mv\ \sin\ \alpha/(QB)$, egy körülfordulás ideje, tekintettel a körön való futás $v\ \sin\ \alpha$ sebességére:

$$\frac{2\pi mv\ \sin\ \alpha}{QBv\ \sin\ \alpha} = \frac{2\pi m}{QB}.$$

Ennek egész számú többszöröse $d/(v\ \cos\ \alpha)$:

$$\frac{d}{v\ \cos\ \alpha} = k \cdot \frac{2\pi m}{QB}.$$

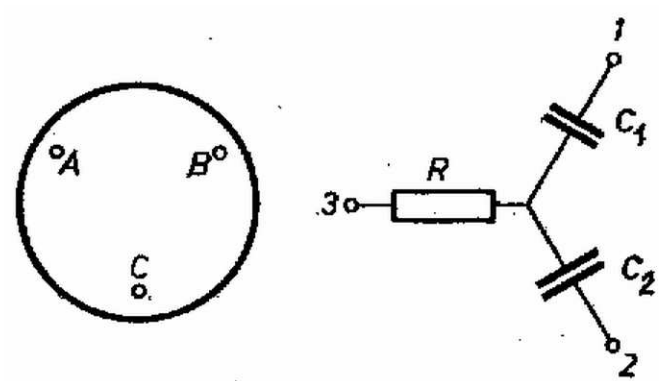
Innen a szükséges mágneses indukció:

$$B = k \cdot \frac{2\pi m\ \cos\ \alpha}{dQ} \cdot v = k \cdot \frac{2\pi\ \cos\ \alpha}{d} \sqrt{\frac{2Um}{Q}}.$$

Lényegtelen, hogy a mágneses indukció az adott irányban előre vagy hátra mutat, ettől csak a spirális menetiránya függ. $k = 1$ esetében a spirális 1 menetével, $k = 2$-nél 2-vel érjük el a célt stb. Számadatainkkal: $B = k \cdot 0{,}0067$ tesla.

Kísérleti feladat. *Adva van egy fekete doboz A, B, C egyforma csatlakozásokkal, benne csillagkapcsolásban R ellenállás és C_1, C_2 kapacitású kondenzátorok vannak (6. ábra). Megállapítandó az ellenállás és a kapacitások nagysága!*

Rendelkezésre áll egy generátor, amely 0,1 kHz *és* 10 kHz *között ismert frekvenciájú váltófeszültséget ad, azonkívül egy-egy váltóáramú ampermérő és voltmérő. Ezekkel az egyes dugók között lemérhetjük a feszültséget és áramerősséget, így megtudhatjuk az impedanciát és megvizsgálhatjuk az impedanciának a frekvenciától való függését.*



6. ábra

Megoldás. Először meg kell tudni, a dugók közül melyik az, amelyikhez az ellenállás csatlakozik. A másik két dugó között tiszta (eredő) kapacitás található, amelyre nézve az impedancia és frekvencia fordítottan arányos. Tehát egy-egy impedanciamérést végzünk 0,1 kHz-nél és 10 kHz-nél, és amelyik dugópár esetében az impedancia és a frekvencia fordítottan arányos, azokhoz vezetnek a kondenzátorok (legyenek ezek az 1 és 2 csatlakozások). Ezután többféleképpen dolgozhatunk tovább.

a) Egy bizonyos frekvenciánál lemérjük az 1 és 2 kivezetések között a sorba kapcsolt kondenzátorok eredő impedanciáját:

$$Z = \frac{1}{\omega C_1} + \frac{1}{\omega C_2}. \tag{1}$$

Ezután lemérjük $1-3$, valamint $2-3$ között az ellenállás és kondenzátor eredő impedanciáját: Z_1-et és Z_2-t, amelyekre

$$Z_1^2 = R^2 + \left(\frac{1}{\omega C_1}\right)^2, \tag{2}$$

$$Z_2^2 = R^2 + \left(\frac{1}{\omega C_2}\right)^2. \tag{3}$$

Egyenletrendszert kaptunk R, C_1, C_2-re. Ebből a kapacitások:

$$\frac{1}{C_1} = \frac{\omega}{2Z}(Z^2 + Z_1^2 - Z_2^2),$$
$$\frac{1}{C_2} = \frac{\omega}{2Z}(Z^2 - Z_1^2 + Z_2^2).$$

Ismerve C_1 és C_2 nagyságát (2) vagy (3) könnyen megadja az R ellenállást.

b) Az 1 és 2 kivezetéseket összekapcsoljuk (a kapacitások most összegeződnek), azután két különböző frekvenciánál mérjük le az impedanciát 3 és az egyesített $1-2$ között:

$$Z_a^2 = R^2 + \frac{1}{\omega_a^2 (C_1 + C_2)^2},$$
$$Z_b^2 = R^2 + \frac{1}{\omega_b^2 (C_1 + C_2)^2}.$$

Az egyenletrendszerből $C_1 + C_2$ kapacitásösszeget kiküszöbölve kapjuk az ellenállásra:

$$R^2 = \frac{\omega_a^2 Z_a^2 - \omega_b^2 Z_b^2}{\omega_a^2 - \omega_b^2}.$$

R ismeretében a (2) és (3) egyenletekkel számíthatók a kapacitások.

c) Ha elegendően kicsiny frekvenciával mérünk, akkor R elhanyagolható $1/\omega C_1$, illetve $1/\omega C_2$ mellett és az impedanciákból rögtön számolhatjuk C_1-et és C_2-t. Ezután igen nagy frekvenciával mérve a kondenzátorok ellenállása hanyagolható el és az R ellenállást kapjuk meg.

d) Ha felrajzoljuk az $1-3$ és $2-3$ közötti impedanciáknak a frekvenciától való függését, akkor a frekvenciát növelve mindkét görbe közös aszimptotája adja meg az R ellenállást. Ennek ismeretében a (2) és (3) egyenletekből megkaphatók a kapacitások.