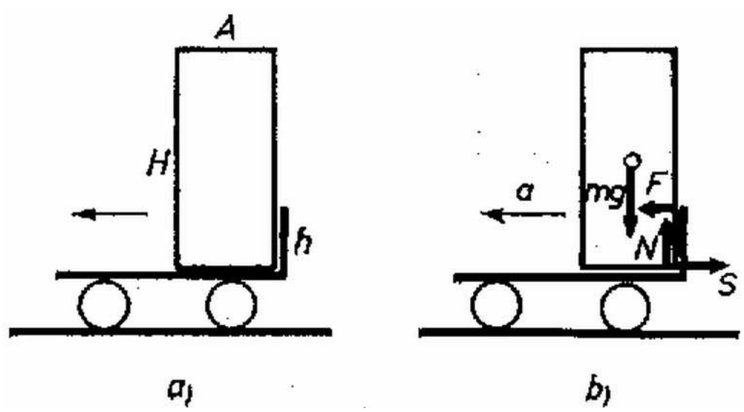
Az 1977. évi középiskolai tanulmányi verseny feladatai

Az I. forduló feladatai

1. *Teherautón m tömegű, A alapszélességű, H magasságú láda áll és a h magasságú hátlaphoz támaszkodik* [1.*a*) *ábra*]. *Mekkora gyorsulással indulhat az autó, hogy a láda le ne billenjen, a) ha a láda és az alap között nincs súrlódás, b) ha a láda és az alap között a súrlódási együttható* μ? *A hátlap és a láda között nincs súrlódás. Számadatok:* $m = 600$ kg, $A = 1{,}2$ m, $H = 3$ m, $h = 0{,}7$ m, $\mu = 0{,}2$.



1. ábra

Megoldás. A ládára gyorsulás közben a következő erők hatnak: az mg súlyerő, a teherautó rakfelületén ható N nyomóerő és S súrlódási erő, valamint a hátlap F nyomóereje (1.b) ábra). A felbillenés határán az N nyomóerő támadáspontja a láda hátsó élénél lesz, az F nyomóerőé pedig a hátlap legfelső pontjánál. A mozgásegyenletek a vízszintes és függőleges erőkomponensekre, valamint a forgómozgás egyenlete nulla szöggyorsulás esetén a láda tömegközéppontjára vonatkoztatva:

$$ma = F = S,$$
$$0 = mg - N,$$
$$0 = N \cdot \frac{A}{2} + S \cdot \frac{H}{2} - F \cdot \left(\frac{H}{2} - h\right).$$

Továbbá a határesetben

$$S = \mu N.$$

Az egyenletrendszerből a keresett gyorsulás:

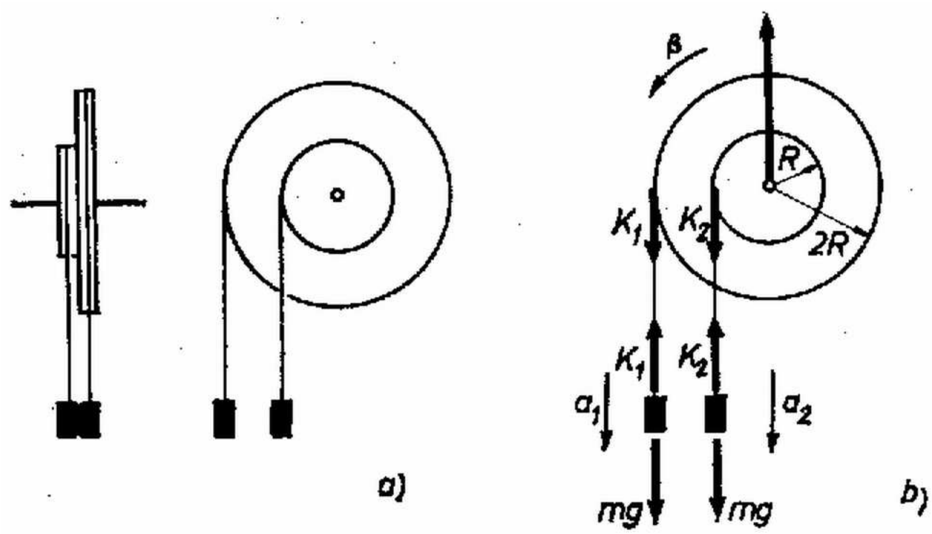
$$a = g \cdot \frac{A + 2\mu h}{H - 2h}.$$

Az *a)* esetben $\mu = 0$ és $a = 0{,}75\,g = 7{,}36$ m/s^2, a *b)* esetben $a = 0{,}925\,g = 9{,}07$ m/s^2.

2. *Ugyanazon anyagból, ugyanazon vastagságban készült kettős állócsiga sugarai* 10 *cm és* 20 *cm hosszúak, az állócsiga teljes tömege* 5 *kg. A fonalakon* 9 *kg-os tömegek lógnak* [2.*a*) *ábra*]. *Elengedve a szerkezetet, a testek mennyi idő múlva jutnak* 4,9 méter*rel mélyebbre?*

Megoldás. A csiga gyorsuló forgást végez. A sugarak arányából következik, hogy a kis csigának 1 kg, a nagy csigának 4 kg a tömege; így a kettőscsiga tehetetlenségi nyomatéka ($R = 10$ cm):

$$\Theta = (1/2) \cdot 1\ \text{kg} \cdot R^2 + (1/2) \cdot 4\ \text{kg} \cdot (2R)^2 = 0{,}085\ \text{kg} \cdot \text{m}^2.$$



2. ábra

Az elrendezésben szereplő három testre ható erők a 2.b) ábrán láthatók; K_1, és K_2 a fonálerők. A gyorsulások és a szöggyorsulás jelölését, valamint a pozitív irányokat szintén az ábrán adtuk meg. A mozgásegyenlet a két $m = 9$ kg tömegű testre:

(1) $$ma_1 = mg - K_1,$$

(2) $$ma_2 = mg - K_2.$$

A forgómozgás egyenlete a csigára:

(3) $$\Theta\beta = K_1 \cdot 2R + K_2 \cdot R.$$

A kényszerfeltételek:

(4) $$a_1 = 2R\beta;$$

(5) $$a_2 = R\beta.$$

Ebből az egyenletrendszerből fejezzük ki K_1-et:

$$K_1 = mg - \frac{6R^2m^2g}{\Theta + 5mR^2} = -0{,}82 \text{ N}.$$

A negatív erő azt jelenti, hogy a bal oldali fonál nem húz, hanem nyomóerőt fejt ki, ami lehetetlen. A valóságban a fonál laza marad, $K_1 = 0$, $a_1 = g$, a (4) egyenlet nem teljesül, az igazi egyenletrendszer pedig

(2a) $$ma_2 = mg - K_2,$$

(3a) $$\Theta\beta = K_2 \cdot R,$$

(5a) $$a_2 = R\beta.$$

Ennek az egyenletrendszernek a megoldása már valóságos eredményt ad:

$$\beta = 50{,}4 \text{ s}^{-2};$$
$$a_2 = 0{,}51\ g = 5{,}04 \text{ ms}^{-2},$$

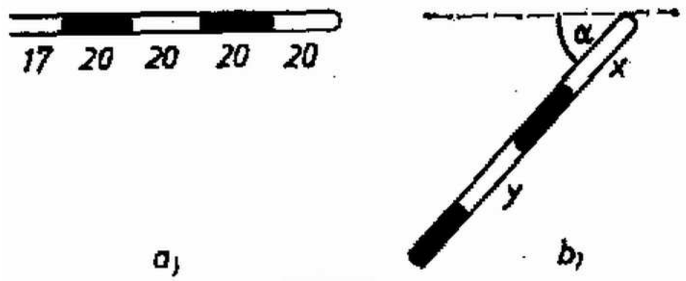
valamint

$$a_1 = g.$$

A 4,9 méteres út megtételéhez szükséges idők 1,39 s és 1 s.

3. *Egy 97 cm hosszú, vékony üvegcső vízszintesen fekszik, benne $20-20$ cm hosszú légoszlopokat $20-20$ cm hosszú higanyoszlopok választanak el* [3.*a)* *ábra*]. *Meddig lehet a cső nyitott végét lesüllyeszteni anélkül, hogy higany folyjék ki a csőből?*

Megoldás. A cső helyzetét az α szög határozza meg [3.*b)* ábra].



3. ábra

A ferde csőben levő l hosszúságú higanyszál két oldalán a légnyomáskülönbség:

$$l\gamma \sin\alpha,$$

ahol γ a higany fajsúlya. Így a két bezárt légoszlopra felírhatjuk a Boyle–Mariotte törvényt (A az üvegcső keresztmetszete, $p_0 = 76\ \mathrm{cm}\cdot\gamma$ a külső légnyomás, x és y a levegőoszlopok hossza a ferde helyzetben):

$$p_0 \cdot A \cdot 20\ \mathrm{cm} = (p_0 - 20\ \mathrm{cm}\cdot\gamma\cdot\sin\alpha)\cdot Ay;$$
$$p_0 \cdot A \cdot 20\ \mathrm{cm} = (p_0 - 40\ \mathrm{cm}\cdot\gamma\cdot\sin\alpha)\cdot Ax.$$

A teljes csőhossz

$$97\ \mathrm{cm} = 20\ \mathrm{cm} + y + 20\ \mathrm{cm} + x.$$

Az egyenletrendszert rendezve a

$$0{,}5\sin^2\alpha + 1{,}85\sin\alpha + 1{,}077 = 0$$

másodfokú egyenlethez jutunk, melynek megoldása

$$\sin\alpha = 1{,}85 \pm 1{,}126,$$

a fizikailag értelmes megoldás

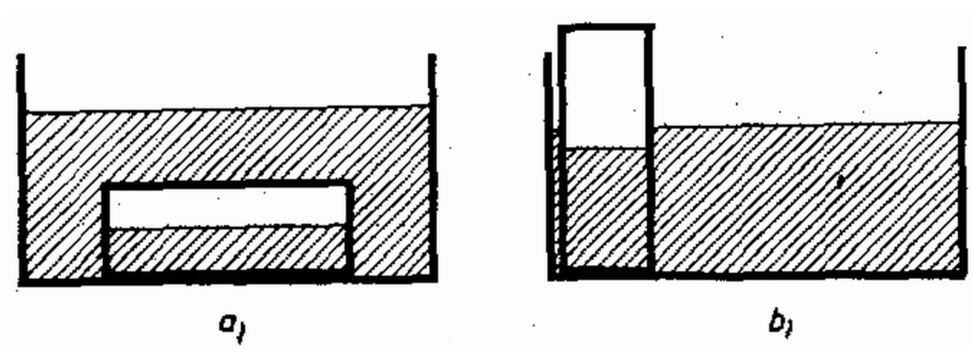
$$\alpha = 46°24',$$

amiből

$$x = 32{,}2\ \mathrm{cm}, \quad y = 24{,}8\ \mathrm{cm}.$$

4. *Fémből készült vékonyfalú, négyzetes oszlop alakú edény súlya 13 kp, magassága 6 dm, alapélei 2 dm hosszúak. Az edény félig tele van vízzel és egy 20 dm^2 alapterületű edényben fekszik, amelyben 4 dm magasan áll a víz* [4.*a) ábra*]. *Mekkora munkavégzés árán lehet a négyzetes oszlopot az alapjára állítani?*

Megoldás. Először megállapítjuk, hogy a hasáb nem úszik, mert összsúlya 25 kp, a kiszorított víz súlya 24 kp. Megvizsgáljuk, a művelet folyamán mekkora darabbal kell feljebb emelni az egész berendezés súlypontját, vagyis mennyi a helyzeti energia változása.



4. ábra

Eredetileg a helyzeti energia, a nyitott edény aljához viszonyítva:

$$13\ \mathrm{kp}\cdot 0{,}1\ \mathrm{m} + 12\ \mathrm{kp}\cdot 0{,}05\ \mathrm{m} + 16\ \mathrm{kp}\cdot 0{,}1\ \mathrm{m} + 40\ \mathrm{kp}\cdot 0{,}3\ \mathrm{m} = 15{,}5\ \mathrm{mkp}.$$

Az új helyzetben [4.b) ábra]:

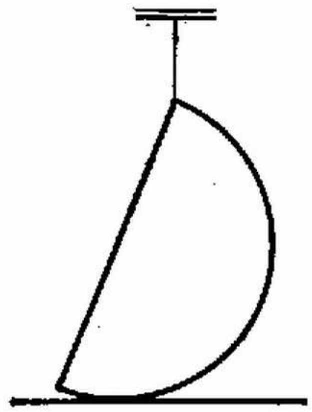
$$13\ \mathrm{kp}\cdot 0{,}3\ \mathrm{m} + 12\ \mathrm{kp}\cdot 0{,}15\ \mathrm{m} + 56\ \mathrm{kp}\cdot 0{,}175\ \mathrm{m} = 15{,}5\ \mathrm{mkp}.$$

A két helyzeti energia megegyezik, nem szükséges eredő munkavégzés. De közben az átmeneti helyzetek nem egyensúlyi helyzetek, a mozgatás egyik részében végzett munkát a másik részben visszakapjuk.

A II. forduló feladatai

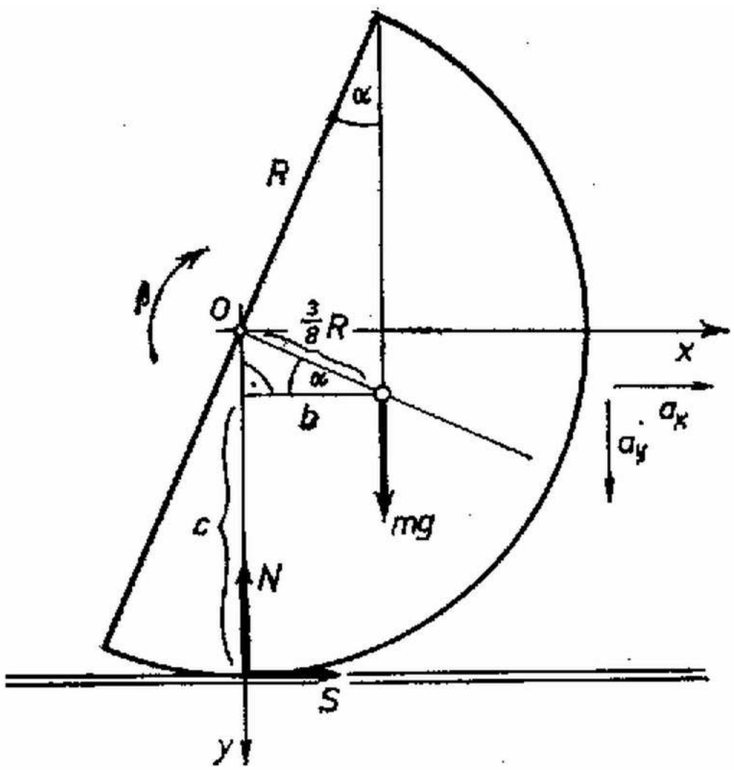
1. *Homogén, tömör félgömböt peremének egy pontjában fonállal felfüggesztünk egy vízszintes, érdes asztallap fölött úgy, hogy éppen érintkeznek, de nem nyomják egymást (5. ábra). Ezután a fonalat elégetjük. Legalább mekkora legyen a súrlódási együttható, hogy a félgömb ne csússzék meg? A félgömb súlypontja a sugár* 3/8*-ában van.*

(Holics László)



5. ábra

Megoldás. A félgömb a fonál elégetésének pillanatában gyorsulva kezd mozogni. Legyen a tömegközéppont gyorsulásának vízszintes összetevője a_x, függőleges összetevője a_y, szöggyorsulása pedig β (6. ábra).



6. ábra

Az elégetés után a félgömbre a következő erők hatnak: súlyerő (mg); súrlódási erő (S) és nyomóerő (N) az alátámasztási pontban. A mozgásegyenleteket az erők vízszintes és függőleges komponenseire, valamint a tömegközéppontra vonatkoztatott forgatónyomatékokra írjuk fel:

(1) $$ma_x = S,$$

(2) $$ma_y = mg - N,$$

(3) $$\Theta\beta = Nb - Sc.$$

Itt b és c a 6. ábrán megjelölt távolságok, Θ pedig a félgömb súlypontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka. A tehetetlenségi nyomaték kiszámításához a Steiner-tételt használjuk:

$$\Theta_1 = \Theta + m(3R/8)^2,$$

ahol $\Theta_1 = 0{,}4\, mR^2$ az m tömegű, R sugarú félgömb tehetetlenségi nyomatéka a gömb középpontján áthaladó tengelyre vonatkoztatva. Innen

(4) $$\Theta = (83/320)mR^2.$$

b és c értékét a 6. ábra alapján írhatjuk fel:

(5) $$b = (3/8)R\ \cos\alpha,$$

(6) $$c = R - (3/8)R\ \sin\alpha,$$

ahol

(7) $$\mathrm{tg}\ \alpha = 3/8.$$

Fel kell még írnunk, hogy milyen összefüggések teljesülnek a szöggyorsulás és a súlypont gyorsuláskomponensei között. Legyen koordinátarendszerünk kezdőpontja a gömb középpontja (6. ábra). A súlypont koordinátái a fonál elégetése előtt

$$x_0 = (3/8)R\ \cos\alpha,$$
$$y_0 = (3/8)R\ \sin\alpha.$$

Ha a félgömb a gömb középpontja körül valamilyen $\Delta\alpha$ szöggel elfordulna, a koordináták kifejezésébe α helyett $(\alpha+\Delta\alpha)$-t kellene írni. Esetünkben a félgömb gurul is, ezért $\Delta\alpha$ szögelforduláshoz az x koordináta $R\cdot\Delta\alpha$ növekedése tartozik. Így a mozgás folyamán a súlypont koordinátái (feltételezve a csúszásmentes gördülést):

$$x = (3/8)R\ \cos(\alpha+\Delta\alpha) + R\cdot\Delta\alpha,$$
$$y = (3/8)R\ \sin(\alpha+\Delta\alpha).$$

A mozgás kezdetét vizsgáljuk. Tekintsünk olyan kis időket, hogy legyen $\Delta\alpha$ igen kicsiny. Ekkor a $\cos\Delta\alpha$ értékét 1-gyel, $\sin\Delta\alpha$-t pedig $\Delta\alpha$-val közelíthetjük:

$$\cos(\alpha+\Delta\alpha) = \cos\ \alpha - \Delta\alpha\cdot\sin\ \alpha,$$
$$\sin(\alpha+\Delta\alpha) = \sin\ \alpha + \Delta\alpha\cdot\cos\ \alpha,$$

azaz

$$x - x_0 = R[1-(3/8)\sin\ \alpha]\Delta\alpha,$$
$$y - y_0 = R[(3/8)\cos\ \alpha]\Delta\alpha.$$

Ezeket az egyenleteket összevethetjük a mozgás kezdeti szakaszára érvényes alábbi összefüggésekkel (t az idő):

$$\Delta\alpha = (1/2)\beta t^2,$$
$$x - x_0 = (1/2)a_x t^2,$$
$$y - y_0 = (1/2)a_y t^2;$$

amiből megkapjuk a keresett kényszeregyenleteket:

(8) $$a_x = R\beta[1-(3/8)\sin\ \alpha],$$

(9) $$a_y = R\beta[(3/8)\cos\ \alpha].$$

A megcsúszás határán még teljesül az

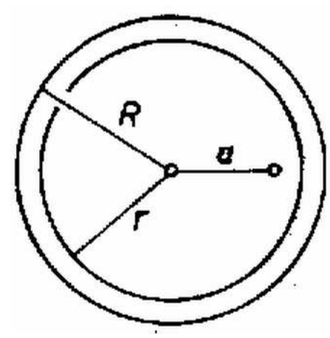
(10) $$S = \mu N$$

egyenlet is. Az (1) – (10) egyenletrendszert megoldva megkapjuk a súrlódási együttható minimálisan szükséges értékét ahhoz, hogy az elégetést követően ne csússzék meg azonnal a félgömb:

$$\mu = 0{,}3009.$$

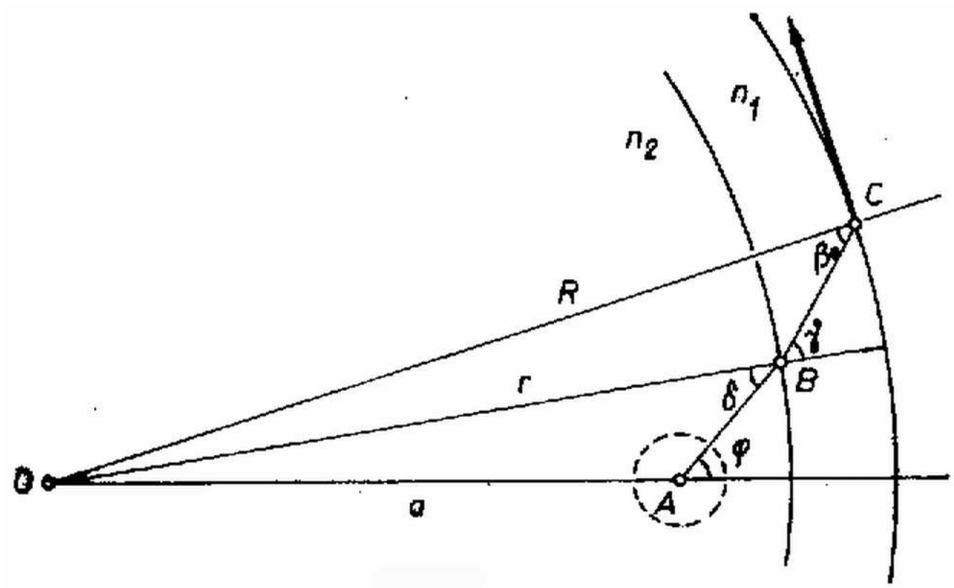
2. *$n_1 = 1{,}5$ törésmutatójú üvegből készült gömbhéj külső sugara $R = 7{,}5$ cm, belső sugara $r = 6{,}5$ cm (7. ábra). A gömbben $n_2 = 1{,}6$ törésmutatójú szénkéreg van. A középponttól $a = 6$ cm távolságban pontszerű fényforrás van. Fényének hány százaléka hagyja el a berendezést?*

(Vermes Miklós)



7. ábra

Megoldás. Az üveg – levegő határfelületre érvényes teljes visszaverődés határszöge határozza meg azt a 2φ nyílásszögű kettőskúpot, amelynek belsejéből minden fénysugár kijut a rendszerből (8. ábra). Ha ugyanis egy fénysugár a felületre érve részben megtörik (áthalad a felületen), részben visszaverődik, a gömb szimmetriája miatt a visszavert rész ismét azonos szögben éri el a gömb felületet, és egy része ismét kilép a rendszerből. Előbb-utóbb így minden, eredetileg a 2φ nyílásszögű kettőskúp belsejéből indult fénysugár kijut a rendszerből.



8. ábra

A C pontban (8. ábra) a teljes visszaverődés határszögére $\sin\beta_0 = 1/n_1$ egyenlet teljesül. Az ehhez tartozó γ szöget az OBC háromszögre felírt sinustétel adja:

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\beta_0} = \frac{R}{r},$$

tehát

$$\sin\gamma = \sin\beta_0 \cdot \frac{R}{r} = \frac{1}{n_1} \cdot \frac{R}{r}.$$

A B pontban a töréstörvény szerint $\sin\delta / \sin\gamma = n_1/n_2$, tehát

$$\sin\delta = \sin\gamma \cdot \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{n_2} \cdot \frac{R}{r}.$$

Végül az OAB háromszögre felírt sinustétel szerint:

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\delta} = \frac{r}{a}, \qquad \text{ebből} \qquad \sin\varphi = \sin\delta \cdot \frac{r}{a} = \frac{1}{n_2} \cdot \frac{R}{a}.$$

Ugyanez a helyzet az A-ban levő fényforrásból balra kiinduló sugárkúp esetében is; az eredmény n_1-től és r-től független.

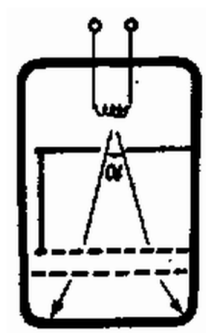
A kijutó fénymennyiség százalékának megállapítása érdekében a fényforrást egy ϱ sugarú gömbbel kell körülvenni, azután megállapítani, hogy kétoldalt a kilépő sugarakhoz tartozó gömbsüveg-felszín mekkora törtrésze az egész gömbfelületnek. A gömbsüvegek együttes felszíne $2\cdot 2\pi\varrho(\varrho-\varrho\ \cos\ \varphi)$, az egész gömbfelszín $4\pi\varrho^2$. Tehát a kijutó fény aránya:

$$\frac{4\pi\varrho^2(1-\cos\varphi)}{4\pi\varrho^2}=1-\cos\ \varphi.$$

Számadatainkkal $\varphi=51°21'$, így az egész fény 37,5%-a jut ki.

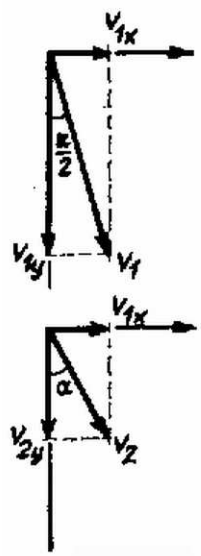
3. *Egy vákuumcsőben az izzószálból kilépő elektronok α nyílásszögű nyalábban hagyják el az U_0 gyorsító feszültségű anódot (9. ábra). Útjukba állítunk egy fémháló-párt, amelynek hálói között potenciálkülönbség van. Mekkora legyen ez a potenciálkülönbség, hogy a nyaláb 2α nyílásszögűvé terüljön szét? Számadatok: $U_0=60\ 000$ volt, $\alpha=30°$.*

(Wiedemann László)



9. ábra

Megoldás. A szélső elektronok $v_1=\sqrt{2QU_0/m}$ sebességgel, a középvonalhoz képest $\alpha/2$ szöggel lépnek át a felső hálón (10. ábra, Q az elektron töltése, m pedig a tömege).



10. ábra

A v_1, sebesség vízszintes összetevője, v_{1x}, változatlanul megmarad, viszont a v_{1y} összetevő úgy csökken, hogy az $\alpha/2$ szögből α lesz.

A szög kétszereződéséhez tartozó összefüggések:

$$\sin\ \alpha=\frac{v_{1x}}{v_2},\qquad \sin\frac{\alpha}{2}=\frac{v_{1x}}{v_1},$$

vagyis

$$\frac{v_2}{v_1}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\ \alpha}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=-\frac{1}{2\ \cos\frac{\alpha}{2}}.$$

A hálók közötti potenciálkülönbségnek akkorának kell lennie, hogy a v_1 sebességet v_2-re csökkentse; az energiatörvény szerint

$$\frac{mv_1^2}{2}-\frac{mv_2^2}{2}=QU;$$

ebből a szükséges feszültségkülönbség

$$U = \frac{m}{2Q}(v_1^2 - v_2^2) = \frac{mv_1^2}{2Q}\left[1 - \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2\right] = U_0\left[1 - \frac{1}{4\,\cos^2(\alpha/2)}\right].$$

Számadatainkkal $U = 43\ 920$ volt.

A III. kísérleti forduló

a) *Fektessen az asztalra papírlapot és erre indigót. Állványba fogott ferde csövön keresztül ejtsen az asztalon levő lapra acélgolyót. A pattogó golyó nyomot hagy a papíron. Mit és hogyan lehet megállapítani a papíron kapott pontsorból?*

b) *Az asztalon található a „Cartesius-búvár" néven ismert kísérleti eszköz, valamint egy üres kémcső, amely pontosan megegyezik a mérőhengerben levővel, tömege* 12,7 *gramm. A mérőhengerben levő folyadék mely anyagi állandóit tudná meghatározni az asztalon levő eszközök segítségével?*

c) *Az asztalon található egy telep, egy ismeretlen ellenállás és egy feszültségmérő műszer. Mérések alapján határozza meg az ismeretlen ellenállás értékét!*

Az 1977. évi fizikai tanulmányi verseny eredménye.

A fizikából nem tagozatos tanulók versenyében:

I. díj: *Magyar Zoltán* (Budapest, Jedlik Ányos Gimn. IV. o. t., tanára: Galántai Zsuzsa).

II. díj: *Vankó Péter* (Budapest, Móricz Zs. Gimn. IV. o. t., tanára: Sikó Attiláné).

III. díj: *Tóth Csaba* (Sopron, Széchenyi István Gimn. IV. o. t., tanára: Kopik István).

A további helyezettek: 4. *Dőry István* (Budapest, Piarista Gimn. IV. o. t., Havas József), 5. *Bozi Ferenc* (Szombathely, Nagy Lajos Gimn. IV. o. t., Horváth István), 6. *Rapai Tibor* (Budapest, József Attila Gimn. IV. o. t., Honfi Lászlóné), 7. *Gajdócsi Sándor* (Bácsalmás, Hunyadi János Gimn. IV. o. t., Németh Mihály), 8. *Váradi Ferenc* (Miskolc, Földes Ferenc Gimn. IV. o. t., Dolák Gabriella), 9. *Szigeti Antal* (Kecskemét, Katona József Gimn. IV. o. t., Fodor István), 10. *Köteles Zoltán* (Budapest, I.László Gimn. IV. o. t., Szabó József).

A fizikából tagozatos tanulók versenyében:

I. díj: *Tankovics Tibor* (Budapest, Kaffka Margit Gimn. IV. o. t., tanára: Mórocz Béláné).

II. díj: *Dániel István* (Budapest, Petőfi Sándor Gimn. IV. o. t., tanára: Iványi Tibor).

III. díj: *Kisvárdai László* (Csongrád, Batsányi J. Gimn. IV. o. t., tanára: Szucsán András).

A további helyezettek: 4. *Ari Sándor* (Ózd, József Attila Gimn. IV. o. t., Farkas Gézáné), 5. *Kertay Zoltán* (Budapest, Petőfi Sándor Gimn. IV. o. t., Iványi Tibor), 6. *Kovács Zsolt* (Szolnok, Verseghy Ferenc Gimn. IV. o. t., Sebestyén István), 7. *Németh Gábor* (Budapest, József Attila Gimn. III. o. t., Tóth Eszter), 8. *Gráf István* (Budapest, Petőfi Sándor Gimn. IV. o. t., Iványi Tibor), 9. *Mari László* (Nagykőrös, Arany János Gimn. IV. o. t., Mester Szabó József), 10. *Bátori Péter* (Bonyhád, Petőfi Sándor Gimn. IV. o. t., Katz Sándor).