A feladat föltevései biztosítják, hogy az x_1, x_2 gyökökből képzett

$$s_n = x_1^n + x_2^n$$

összeg egész szám. Megmutatjuk ugyanis, hogy s_n minden n mellett előállítható mint a két gyök $x_1 + x_2 = -p$ összegéből, $x_1 x_2 = q$ szorzatából és egész számokból véges számú összeadás és szorzás útján számított kifejezés. Egyidejűen megvizsgáljuk a feladat kérdését: adott n mellett r-nek milyen kitevőjű hatványával osztható s_n?

1. Az $n = 1$ esetben $s_1 = x_1 + x_2 = -p = -rp'$, ahol p' egész szám, és általában nem mondhatjuk, hogy s_1 az r-nek 1-nél nagyobb kitevőjű hatványával osztható.

Az $n = 2$ esetben

$$s_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = p^2 - 2q,$$

itt $p^2 = r^2 p'^2$ és $-2q = -2rq'$, ahol p'^2 és q' egész szám. Bár az első tag osztható r^2-nel, de a második csak r-rel, ezek együtt s_2-re *általában* csak az r-rel való oszthatóságot biztosítják. (Speciálisan $r = 2$ esetében a második tag is osztható r^2-nel.)

Ha $n = 3$, akkor

$$\begin{aligned} s_3 = x_1^3 + x_2^3 &= (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2) - (x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2) = \\ &= -ps_2 - x_1x_2(x_1 + x_2) = -ps_2 + pq, \end{aligned}$$

mindkét tag a 2. hatványával osztható r-nek, tehát s_3 is. Ugyanígy

$$\begin{aligned} s_4 &= x_1^4 + x_2^4 = (x_1 + x_2)s_3 - (x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3) = -ps_3 - x_1x_2(x_1^2 + x_2^2) = \\ &= -ps_3 - qs_2, \end{aligned}$$

és a második tagra tekintettel csupán r^2-ről állíthatjuk, hogy vele s_4 osztható.

Jelöljük e_n-nel azt a legnagyobb kitevőt (exponenst), amelyről állíthatjuk, hogy s_n osztható r^{e_n}-nel, így eddig a következőket találtuk:

$$\begin{aligned} n &= 1,\ 2,\ 3,\ 4 \quad \text{mellett} \\ e_n &= 1,\ 1,\ 2,\ 2, \end{aligned}$$

azaz n-et 1-gyel növelve e_n vagy változatlan maradt vagy maga is 1-gyel nőtt: $e_n - e_{n-1} = 0$ vagy 1 (ha $n \leqq 4$). Mondhatjuk ezt is: e_n váltakozva megmaradt vagy nőtt, és n-et 2-vel növelve e_n mindig 1-gyel nőtt. Az utóbbit fogjuk általában bebizonyítani.

2. Mivel x_1 és x_2 az (1)-nek gyökei, azért fennáll

$$x_1^2 + px_1 + q = 0 \qquad \text{és} \qquad x_2^2 + px_2 + q = 0.$$

Ezeket megszorozva rendre x_1^{n-2}-nel, x_2^{n-2}-nel, majd összeadva és rendezve

$$\begin{gathered} (x_1^n + x_2^n) + p(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) + q(x_1^{n-2} + x_2^{n-2}) = 0, \\ s_n = -ps_{n-1} - qs_{n-2}. \end{gathered}$$

A jobb oldal első tagja r-nek 1-gyel magasabb hatványával osztható, mint s_{n-1}, a második pedig 1-gyel magasabb hatványával, mint s_{n-2}, azaz bennük az r alap $(e_{n-1} + 1)$, ill. $(e_{n-2} + 1)$ kitevővel szerepel. Ha tehát $e_{n-1} = e_{n-2}$, akkor s_n-re

$$e_n = e_{n-1} + 1,$$

és ekkor ugyanezzel a meggondolással

$$s_{n+1} = -ps_n - qs_{n-1} \qquad \text{alapján} \qquad e_{n+1} = e_n,$$

vagyis az exponensek sorozatában két egymás utáni, egyenlő tagot – ha van ilyen pár – két egyező, náluk 1-gyel nagyobb tag követ, speciálisan $n - 1 = 4$-re $e_5 = e_6 = 3$; ha pedig $e_{n-1} = e_{n-2} + 1$, akkor hasonlóan

$$e_n = e_{n-1}, \qquad \text{és} \qquad e_{n+1} = e_n + 1,$$

vagyis ha az exponens-sorozat egy tagjára egy 1-gyel nagyobb következett, akkor a következő tag egyezik a legutóbbival, az erre következő pedig 1-gyel nagyobb, speciálisan $n - 1 = 5$ esetében $e_6 = 3$ és $e_7 = 4$.

Mivel $n \leqq 4$ esetében másféle kapcsolat nem volt e_{n-1} és e_{n-2} közt, ezzel beláttuk, hogy a fent látott szabályszerűségek általában érvényesek, vagyis a páros n-ekre, $n = 2, 4, \ldots, 2m \ldots$ esetére $e_n = 1, 2, \ldots, m, \ldots$, a páratlanokra pedig, $n = 1, 3, 5, \ldots, 2m - 1$ esetére $e_n = 1, 2, \ldots, m$, azaz

$$e_{2m-1} = e_{2m} = m,$$

amit a számok egész részének [ ] jelével összefoglalva így írhatunk:

$$e_n = \left[\frac{n+1}{2}\right],$$

azaz s_n osztható minden olyan r^k-nal, amelyre

$$1 \leqq k \leqq e_n = \left[\frac{n+1}{2}\right].$$