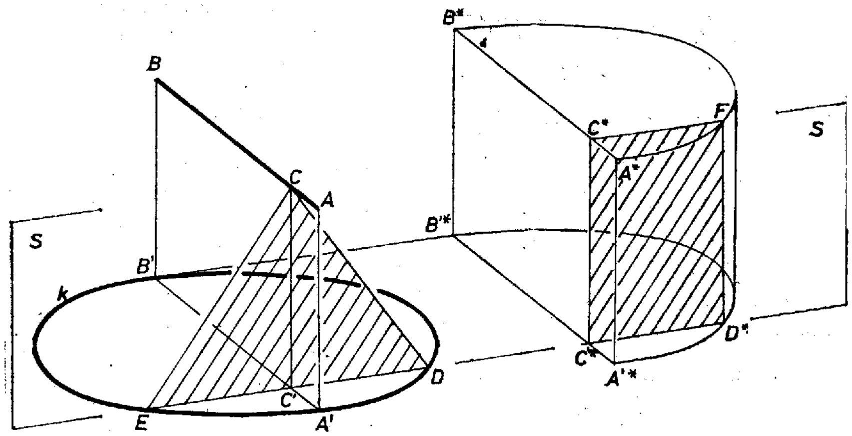
I. megoldás. Legyen a megadott kör k, az AB szakasz vetülete k síkján $A'B'$. Jelöljük a keresett térfogatú testet U-val, V-vel pedig azt az r magasságú félhengert, melynek alapját úgy kapjuk az $A'B'$-vel kettévágott k-nak egyik félköréből, hogy eltoljuk ezt a síkjában $A'B'$-re merőlegesen, r-nél nagyobb távolságra (1. ábra).



1. ábra

Messük el U-t és V-t egy, az AB-re merőleges S síkkal. S messe AB-t C-ben, $A'B'$-t C'-ben, a kör kerületét D-ben és E-ben. V-t pedig abban a $C^*C'^*D^*F$ téglalapban, amelynek első három csúcsa a használt eltolással áll elő a C, C', D pontból. Így az U test DEC metszetháromszögének területe egyenlő a téglalap területével, függetlenül az S sík helyzetét kijelölő C ponttól. Ebből Cavalieri elvére hivatkozva következik, hogy a két test térfogata egyenlő. A félhenger térfogata $r^3\pi/2$, ennyi az U test térfogata is.

II. megoldás. Tartsuk meg az előbbi jelöléseinket, és messük el a testet egy a k síkjával párhuzamos S_1 síkkal, jelöljük AB-től való távolságát z-vel ($0 \le z \le r$), továbbá CD-vel, CE-vel való metszéspontját F-fel, G-vel. A CFG, valamint CDE hasonló háromszögek alapján

$$FG : DE = z : r = \lambda,$$

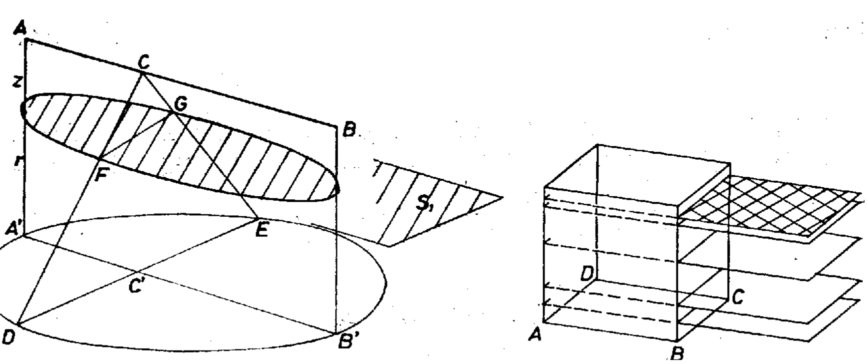
független C megválasztásától, vagyis az U test S_1-beli síkmetszete olyan, hogy az ebből és k-ból minden egyes S által kimetszett húrok aránya az egész síkmetszetre állandó. Ez pedig azt jelenti, hogy az S_1-beli síkmetszetet k síkjára vetítve az alapkör λ arányú affin képét kapjuk (az $A'B'$ tengelyre). A síkmetszet területét a kör területének és az affinitás arányszámának szorzata adja, azaz $r^2\pi\lambda = rz\pi$.

Az U test térfogatát ennek alapján úgy kaphatjuk meg, hogy a síkmetszetek területét integráljuk 0-tól r-ig:

$$\int_0^r rz\pi \, \mathrm{d}z = r\pi \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^r = \frac{r^3\pi}{2}.$$

Horváth László (Hódmezővásárhely, Bethlen G. Gimn.)

Megjegyzések. 1. A felhasznált Cavalieri-féle elv szemléletes kimondása: ha két test úgy helyezhető el a térben, hogy egy alkalmas állású síkkal párhuzamos síkokkal metszve őket, bármelyik síkban keletkezett metszeteik területe egyenlő, akkor a két test térfogata egyenlő. (A mondott elhelyezés csupán könnyűvé teszi a síkmetszetek megfeleltetését.) Szép példája ilyen testpárnak egy r sugarú félgömb és egy r sugarú r magasságú henger, melyből kivágtuk azt a kúpot, melynek alapköre a henger fedőlapja, csúcsa pedig az alaplap középpontja.



2. ábra

2. A fenti megoldások a test térfogatát azzal a feltevéssel élve számították ki, hogy a kérdezett testnek *van térfogata*. Annak eldöntése, ill. bizonyítása, hogy tényleg van térfogata a testnek, nem volt versenyzőink feladata. A feladat szövege is azt sugallta, hogy a térfogat létezik, és mindössze a térfogat értékét kellett meghatározni. Azonban szeretnénk hangsúlyozni, hogy ha a fenti módszerek valamelyikével egy test térfogatát meghatározzuk, akkor nem állítjuk, hogy a test térfogata ennyi és ennyi, hanem csak azt, hogy ha létezik a testnek a térfogata, akkor az csak ennyi lehet.

Olvasóink nagyobb része bizonyára meglepve olvasta e sorokat, még nem hallott olyat, hogy egy testnek ne lenne térfogata. Ez persze azon múlik, mit értünk testen és mit értünk térfogaton. Az iskolai oktatás erre nem térhet ki. Erre tekintettel példát írunk le olyan testre, melynek nincs térfogata.

Tekintsünk egy egységnyi élű kockát, és az $ABCD$ alaplapjával párhuzamos síkmetszetei közül azokat, melyeknek távolsága az alaplaptól mérve racionális szám, toljuk el az AB vektorral. Az így kapott ún.„szőrös kocka” mindegyik az $ABCD$ síkkal párhuzamos síkmetszete egység oldalú négyzet, így mindnek területe egységnyi, a testnek még sincs térfogata.