I. megoldás. Írjunk kört mindegyik kijelölt pont körül az adott k kör r sugarának $1/3$ részével. Az állítás akkor és csak akkor nem igaz, ha e kis „hatáskörök” közt nincs olyan kettő, mely átfedné egymást (vagyis hogy volna közös belső pontjuk). Ugyanis csak ilyen átfedés esetében van a két kis kör középpontja egymástól $2r/3$-nál kisebb távolságban (és ez minden átfedés esetében így is van), hiszen érintkezés esetében már $2r/3$-mal egyenlő a távolság, ha pedig a két kör kerületének sincs közös pontja, akkor nagyobb $2r/3$-nál.

Tegyük föl az állítással ellentétben, és az iméntiek szerint, hogy a 17 db kis kör közül semelyik kettőnek nincs közös belső pontja. Ekkor a 17 kör együttvéve

$$t_1 = 17\pi\left(\frac{r}{3}\right)^2 = \frac{17\pi}{9}r^2$$

területet fed le. Másrészt mind a 17 kört le lehet fedni egy, a k középpontja körüli $r + \frac{r}{3} = \frac{4r}{3}$ sugarú k' körrel, hiszen k' alól egy hatáskörnek még akkor sem látszanék ki belső pontja, ha a hatáskör középpontja – egy eredetileg kijelölt pontunk – a k kerületén volna. Ámde k' területe $\frac{16\pi}{9}r^2$, kisebb t_1-nél, lehetetlen tehát, hogy k' területén elférjen 17 db átfedés nélküli hatáskör. – Meggyőződtünk az ellentétes állítás ellentmondó voltáról, ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

Füredi Zoltán (Budapest, Móricz Zs. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. Meggondolásunkból az is adódik, hogy 17 pont helyett 16-ot véve is igaz a feladat állítása, mert 16 átfedés nélküli hatáskör sem fedhető le az együttesükkel egyenlő területű k'-vel amiatt, hogy több kör nem fedheti hézagtalanul a síkot átfedés nélkül.

2. A fenti gondolatmenettel azt is meg lehet mutatni, hogy egy r sugarú kör belsejében tetszőlegesen kijelölve n pontot, mindig található köztük kettő, amelyek távolsága kisebb $2\alpha r$-nél – ahol $\alpha > 0$ –, ha

$$\sqrt{n} \geq 1 + \frac{1}{\alpha}.$$

Esetünkben $\alpha = 1/3$.

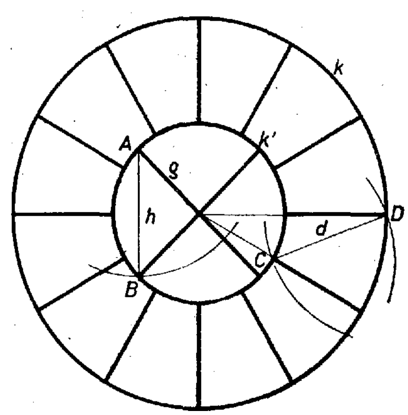
Prőhle Péter (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., III. o. t.)

II. megoldás. Az eredeti k kör sugarát hosszúságegységnek vesszük és megmutatjuk a következőt: lehet k-t olyan 16 részre felosztani, hogy mindegyik rész *átmérője* – ezen általában bármely síkidom két tetszőleges (belső vagy határ-) pontja közti távolság maximumát szokás érteni – kisebb, mint $2/3$. Ebből a feladat állítása már következik. Ugyanis a 17 pont bármilyen kijelölése esetén legalább 2 pont ugyanahhoz a részéhez tartozik a felosztásnak (ha egy kijelölt pont részek közös határvonalára esik – vagy több határvonal csomópontjába –, akkor a pontot az illető részek mindegyikéhez tartozónak tekinthetjük), azon belül pedig nincs $2/3$-nál nagyobb távolságú pontpár.

A felosztást egy a k-val koncentrikus, sugarú k' körrel készítjük elő, ennek belsejét 2 egymásra merőleges átmérővel 4 részre osztjuk, a k' és k közti körgyűrűt pedig 12 egybevágó részre, körgyűrűcikkre, egymással szomszédos páronként $30°$-os szöget bezáró sugaraknak a gyűrűbe eső szakaszaival.

Ekkor egy-egy belső negyedkörnek egyetlen pontja sincs messzebb a határoló körív A végpontjától, mint az ívhez tartozó $AB = h$ húr (a negyedkör benne van az A közepű, AB sugarú körben, lásd ábra), tehát h a rész mondott értelemben vett átmérője. És mindig teljesül

$$h = \varrho\sqrt{2} < \frac{2}{3}, \quad \text{hacsak} \quad \varrho < \frac{\sqrt{2}}{3}. \tag{1}$$



A gyűrű 12-ed részének az átmérője pedig a belső és külső határoló ívéről vett egy-egy nem-szomszédos végpont $CD = d$ távolsága, ami az 1, q és d oldalú háromszögből a cosinustétellel

$$d = \sqrt{1 + \varrho^2 - \sqrt{3}\varrho}$$

(a d-vel szemben levő szög 30°), és így akkor lesz

$$d<\frac{2}{3},\quad \text{ha}\quad \varrho^2-\varrho\sqrt{3}+\frac{5}{9}<0,$$

azaz ha

$$\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{7}}{6}<\varrho<\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{7}}{6} \tag{2}$$

Tizedes alakú közelítő törtekkel tájékozódva (1)-hez elegendő, ha $\varrho<0{,}47$, (2)-höz, ha $0{,}43<\varrho<1{,}30$, eszerint pl. $\varrho=4/9$ mindkét föltételnek eleget tesz (ez tizedes közelítő törtek nélkül is belátható). A kívánt felosztás tehát létezik, állításunkat ezzel bebizonyítottuk.

Szigeti Gábor (Budapest, Móricz Zs. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzés. A felhasznált felosztás azt is mutatja, hogy egy kört hézagtalanul le lehet fedni 16 db 1/3 akkora sugarú körrel.