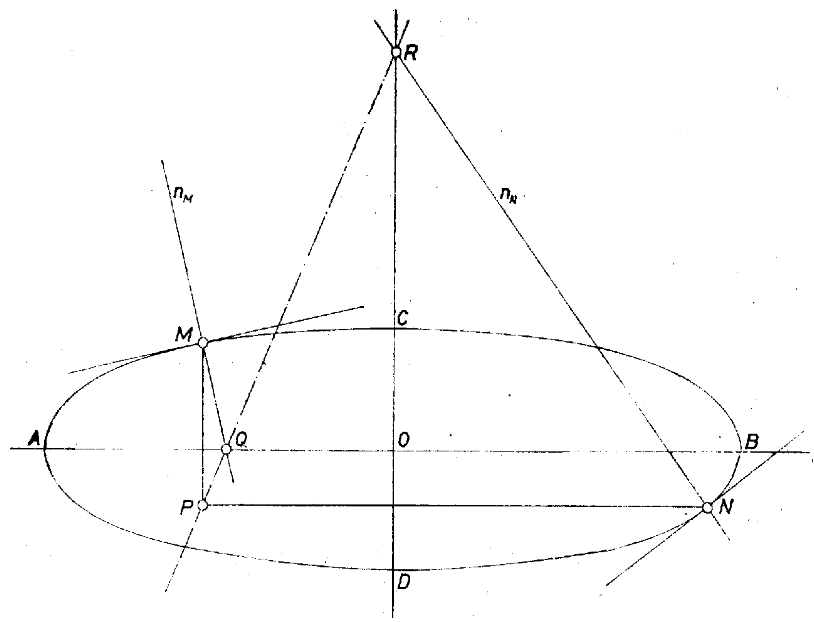
Az állítást a koordináta-geometria eljárásaival bizonyítjuk a szokásosan elhelyezett

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \text{másképpen} \quad y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \tag{1}$$

egyenletű ellipszisre, ahol $a>b$, tehát $AB$ az $x$ tengely, $CD$ az $y$ tengely. (Az $a=b$ esetben körrel volna dolgunk, a normális azonos a sugárral, $Q$ és $R$ egybeesnek, így az állítás semmitmondó.) Legyenek $M$ koordinátái $(x_1,y_1)$, $N$-éi $(x_2,y_2)$, ahol $y_1\neq 0$, és $x_2\neq 0$, különben ugyanis $M$ az $A$ és $B$ egyike, $N$ a $C$ és $D$ egyike lenne és $Q$, ill. $R$ nem lenne egyértelműen meghatározott, és ilyen esetben az állításnak nincs is értelme. Így $P$ koordinátái $P(x_1,y_2)$.




Ellipszisünk $(x_i,y_i)$ pontjában, ahol $x_iy_i\neq 0$, az érintő iránytangense (1)-ből deriválással

$$\mp = \frac{bx_i}{a\sqrt{a^2-x_i^2}}$$

aszerint, hogy $y_i>0$, ill. $y_i<0$, és a négyzetgyököt újra csak (1) alapján kifejezve mindenképpen

$$-\frac{b^2x_i}{a^2y_i}.$$

Így a normális iránytangense és egyenlete

$$\frac{a^2y_i}{b^2x_i}, \quad y-y_i=\frac{a^2y_i}{b^2x_i}(x-x_i), \quad \text{azaz}$$
$$a^2y_ix-b^2x_iy-(a^2-b^2)x_iy_i=0.$$

Ide $i$ helyére 1-et írva $M$ normálisának egyenletét kapjuk, s mivel $Q$ ordinátája 0, ezt behelyettesítve abszcisszája

$$x_Q=\frac{(a^2-b^2)x_1y_1}{a^2y_1}, \quad \text{azaz} \quad Q\left(x_1-\frac{b^2}{a^2}x_1, 0\right),$$

és hasonlóan $N$ révén, azaz $i=2$-t, majd $x=0$-t beírva

$$R\left(0, y_2-\frac{a^2}{b^2}y_2\right).$$

Megállapodásunk szerint $P$ és $Q$ abszcisszái különbözőek, hacsak $x_1\neq 0$, az általuk meghatározott egyenes iránytangense, valamint egyenlete

$$\frac{a^2y_2}{b^2x_1}, \quad y=y_2+\frac{a^2y_2}{b^2x_1}(x-x_1).$$

Erről pedig azonnal látható, hogy $R$ koordinátái kielégítik, a $PQ$ egyenes átmegy $R$-en, az állítást bebizonyítottuk. (A kizárt $x_1=0$ esetben, $M$ a $C$ és $D$ egyike, tehát a $PQ$ egyenes maga az $y$ tengely, a kistengely, az állítás igaz.)

*Bartha Miklós* (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., III. o. t.)