I. forduló

1. Mutassuk meg, hogy ha az n természetes szám, akkor az

$$A=(10^n+10^{n-1}+\ldots+10+1)(10^{n+1}+5)+1$$

szám mindig négyzetszám.

2. Jelöljük a konvex $ABCD$ négyszög AC, BD átlójának felezőpontjait rendre E-vel, F-fel. Bizonyítsuk be, hogy ha $2EF=AD-BC$, akkor AD párhuzamos BC-vel.

3. Legyen a, b tetszőleges pozitív, c tetszőleges valós szám. Határozzuk meg azt az x-et, amelyre

$$3a^{2x}-b^{2x}=ca^xb^x.$$

4. Hány oldalú szabályos sokszögben lehet metszeni egy kockát?

5. Legyen a_n az összes, a tízes számrendszerben legfeljebb n jegyű, nem negatív egész számok száma, b_n pedig ezek közül azoknak a száma, amelyek tízes számrendszerbeli alakjában van ötös számjegy. Adjuk meg a_n-et és b_n-et n függvényeként, és a $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ határértéket!

6. Mutassuk meg, hogy van olyan k természetes szám, amelyre

$$1976<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}<1977.$$

7. Legyen e az ABC háromszög síkjának tetszőleges egyenese. Jelöljük az A, B, C pontoknak az e egyenesen levő merőleges vetületét A_1-gyel, B_1-gyel, C_1-gyel, továbbá az A_1-en átmenő, BC-re merőleges egyenest a_1-gyel, a B_1-en átmenő, CA-ra merőleges egyenest b_1-gyel, a C_1-en átmenő, AB-re merőleges egyenest c_1-gyel. Bizonyítandó, hogy a_1, b_1, c_1 egy ponton megy át.

8. $n\geq 4$ különböző (pozitív) prímszámról tudjuk, hogy közülük bármelyik három összege is prímszám. Mekkora az n szám?

II. forduló

Szakközépiskolák, valamint gimnáziumok általános tantervű osztályai tanulóinak

1. Adott a sík négy különböző pontja: A, B, C és S. Legyen a sík tetszés szerinti P pontjának az A-ra vonatkozó tükörképe P_1; P_1-nek az S pontra vonatkozó tükörképe P_2; P_2-nek a B pontra vonatkozó tükörképe P_3; P_3-nak megint az S pontra vonatkozó tükörképe P_4; P_4-nek a C pontra vonatkozó tükörképe P_5; végül P_5-nek ismét az S pontra vonatkozó tükörképe P_6.

Bizonyítsuk be, hogy P_6 akkor és csak akkor azonos a P ponttal, ha S az ABC háromszög súlypontja!

2. Bizonyítsuk be, hogy minden $2(n^2+n+1)$ alakú szám reciprok értéke – ahol n pozitív egész számot jelent – előállítható az

$$a_k=\frac{1}{k(k+1)(k+2)}\qquad(k=1,2,3,\ldots).$$

sorozat – bizonyos számú, nem feltétlenül az elsővel kezdődő – egymás után következő tagjainak összegeként!

3. Jelölje rendre α, β, γ egy háromszög szögeinek mérőszámát!

a) Mekkora a $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma$ összeg lehető legnagyobb értéke?

b) Mely háromszögben veszi fel ez az összeg a legnagyobb értékét?

c) Bizonyítsuk be, hogy minden háromszögben

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma>1.$$

d) Bizonyítsuk be végül, hogy van olyan háromszög, amelyre

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma<1+\varepsilon,$$

ahol ε tetszés szerinti kicsire választható, rögzített pozitív számot jelent!

A gimnáziumok matematika I. szakosított tantervű osztályainak tanulói részére

1. Az ABC szabályos háromszög egy belső P pontjának az oldalakra vonatkozó tükörképei rendre X, Y és Z. Bizonyítsuk be, hogy az XYZ háromszög területe nem lehet nagyobb az ABC háromszög területénél!

2. Bizonyítsuk be, hogy

$$(k+n)(1+x^k) \geq 2n\frac{1-x^{k+n}}{1-x^n},$$

ha x 1-től különböző nem negatív szám, $k \geq n \geq 1$ pedig egész számok.

3. Legyen A egy egész számokból álló halmaz, és B egy, ugyancsak egészekből álló kételemű halmaz! E két halmaz olyan tulajdonságú, hogy minden egész szám egyértelműen állítható elő egy A-beli és egy B-beli szám összegeként.

Bizonyítsuk be, hogy mindazok az egész számok, amelyek nem állíthatók elő két (nem feltétlenül különböző) A-beli szám különbségeként, ugyanannak az egésznek páratlan többszörösei.

A gimnáziumok matematika II. szakosított tantervű osztályainak tanulói részére

1. Adott egy háromszög. Határozzuk meg a belsejében – esetleg valamelyik oldalán – azt a pontot, amelynek az oldalakra vonatkozó tükörképei által meghatározott háromszög területe maximális!

2. Bizonyítsuk be, hogy az $\{a_n = x + n;\ n = 1, 2, \ldots\}$ sorozathoz akkor és csak akkor találhatók olyan i, j, k indexek, amelyekre $a_i a_j = a_k^2$, ha x racionális.

3. Adott egy egységnyi élű kocka belsejében vagy felületén száz pont.

Bizonyítsuk be, hogy ki lehet választani közülük olyan négy pontot, amelyek által meghatározott tetraéder térfogata nem nagyobb 1/99-nél.