## I. forduló

### Kezdők (legfeljebb I. osztályosok) részére

1. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezést:

$$\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-a)(b-c)}+\frac{1}{c(c-a)(c-b)}.$$

2. Rajzoljuk meg az $ABCD$ négyzet $AB$ oldalára befelé az $ABE$ szabályos háromszöget és a $BC$ oldalára kifelé a $BFC$ szabályos háromszöget. Igazoljuk, hogy $EF=AC$.

3. Bizonyítsuk be, hogy egy természetes szám négyzetét követő természetes szám nem osztható sem 3-mal, sem 7-tel.

4. Szerkesszünk olyan trapézt, melynek magassága 5 cm, átlóinak hossza 6 és 9 cm, a párhuzamos oldalak egyike 3 cm.

5. Ábrázoljuk a következő függvényt:

$$y=|5-|x+1|+x|.$$

6. Az első 76 természetes szám összegében akárhánynak az előjelét megváltoztathatjuk. El lehet-e érni, hogy a kapott összeg 1977 legyen?

7. Egy háromszög szögei különbözők, a legkisebb $18^\circ$. Mindegyik szögét három egyenlő részre osztjuk, az osztó egyenesek egy hatszöget zárnak körül. E hatszög szögei közül kettőt egyenlőnek találunk. Mekkora lehet az eredeti háromszög legnagyobb szöge?

8. Legyenek $A$ és $B$ a $k$ kör belsejében adott különböző pontok. A $k$ kör mely pontjaiból látszik az $AB$ szakasz a legnagyobb szög alatt? (Szerkesztést nem kérünk!)

### Haladók (legfeljebb II. osztályosok) részére

1. Egy $625\times 625$-ös sakktáblán a középső négyzetre szimmetrikusan elhelyezünk 1977 bábut. Bizonyítsuk be, hogy a 313. sorban áll bábu!

2. Szerkesszük meg az egyenlő szárú háromszöget, ha adott a háromszög csúcsszöge, továbbá a beírt kör középpontjának és a magasságpontnak a távolsága.

3. Egy $ABCD$ konvex négyszög $AB$ oldalán levő $P$ pontra $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{PB}}=k$, $CD$ oldalán levő $Q$ pontra pedig $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{QD}}=k$ $(k>1)$. Mennyi az $ABCD$ és $APCQ$ négyszögek területének aránya?

4. Hány olyan háromjegyű szám van, amelyben a páratlan jegyek száma páros?

5. Megoldható-e az egész számok körében az

$$x^2+y^2=1977.$$

egyenlet?

6. Adjuk meg azokat az $a$ valós számokat, amelyekre fennáll, hogy

$$\sqrt{4a-1}+\sqrt{4a^2-1}=1.$$

7. Osztható-e 1977-tel az

$$1^{1977}+2^{1977}+3^{1977}+\ldots+1976^{1977}+1977^{1977}$$

összeg?

8. Melyek azok a háromszögek, amelyeknek van két olyan magasságvonala, hogy ezek hossza egy-egy oldal hosszával egyenlő?

## II. forduló

### Kezdők (legfeljebb I. osztályosok) versenye

### A) Az általános tantervű osztályok részére

1. $A$ és $B$ – bár az egyik 3 km-rel távolabb lakik a várostól, mint a másik – egyszerre érkeztek a városba, mégpedig $A$ lovas kocsin, $B$ teherautón. A kocsis, ill. a sofőr útközben vette fel őket. $A$ is és $B$ is pontosan egyszerre indult el hazulról gyalog, s mindketten útjuk felét tették meg, amikor a fenti járművekre felültek. $A$ 1,5-szer gyorsabban

gyalogolt, mint $B$, viszont az autó, amely $B$-t felvette, 1,5-szer haladt gyorsabban, mint az a lovas kocsi, amelyen $A$ ült. Tudjuk még, hogy a kocsi 2-szer akkora sebességgel haladt, mint $A$ gyalog. Milyen távol lakik a várostól $A$ és $B$?

2. Egy háromszög két csúcsa rögzített, a harmadik csúcsa pedig úgy mozog a síkon, hogy a háromszög területe sohase legyen nagyobb, mint a bármelyik oldala fölé szerkesztett négyzet területének a fele. A sík mely pontjaiba *nem* juthat el így a háromszög mozgó csúcsa?

3. Mennyi a $2^{1977}$ és $5^{1977}$ számok számjegyei számának az összege?

### B) A szakosított matematika I. tantervű osztályok részére

1. Megegyezik az általános tantervű osztályok 1. feladatával.

2. Vannak-e olyan $m$ és $n$ pozitív egész számok, amelyekre

$$m^2 = n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1?$$

3. Adott a síkon hat körlemez úgy, hogy egyiken sincs rajta a többi öt középpontjának egyike sem. Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan pont a síkon, amely mind a hat körlemezen rajta van.

### C) A szakosított matematika II. tantervű osztályok részére

1. Legyenek $p$ és $q$ olyan törzsszámok, melyekre $3 \leqq p < q$, továbbá $p+1$ és $q+1$ egyaránt oszthatók 4-gyel. Bizonyítsuk be, hogy $q^2 - p^2$ nem lehet négyzetszám.

2. $a_1, a_2, \ldots, a_{3n}$ $(n \geq 1)$ természetes számok. Bizonyítsuk be, hogy az $a_i - a_j$ $(1 \leq i < j \leq 3n)$ különbségek közül legfeljebb $3n^2$ olyan lehet, amely nem osztható 3-mal.

3. Egy körvonal hat különböző pontja között 15 húr húzható. Igazoljuk, hogy a kör középpontját ezen húrokra tükrözve, a tükörképek közül legalább 6 a körvonalra, vagy azon kívülre esik.

## Haladók (legfeljebb II. osztályosok versenye)

### A) Az általános tantervű osztályok részére

1. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$(x-6)^4 + (x-4)^4 = 512.$$

2. Igazoljuk, hogy ha hat körlemeznek van közös belső pontja, akkor a hat kör között van olyan, amelyiknek egy másik kör középpontja belső pontja!

3. Egy pozitív egész számokból álló

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < \ldots$$

sorozat olyan tulajdonságú, hogy bármelyik pozitív egész szám vagy szerepel a sorozatban, vagy előállítható a sorozat két elemének összegeként. Bizonyítsuk be, hogy bármely $n$-re a sorozat $n$-edik eleme legfeljebb $n^2$ lehet!

### B) A szakosított matematika I. tantervű osztályok részére

1. Megegyezik az általános tantervű osztályok 1. feladatával.

2. Igazoljuk, hogy ha az $x$, $y$, $z$ valós számokra teljesülnek az

$$x + y + z = 9,$$
$$xy + yz + zx = 24.$$

egyenlőségek, akkor az $x$, $y$, $z$ számok egyike sem lehet 1-nél kisebb, sem 5-nél nagyobb.

3. Bizonyítsuk be, hogy $n^{990} + (n+1)^{1977}$ minden $n$ pozitív egész számra osztható $n^2 + n + 1$-gyel.

### C) A szakosított matematika II. tantervű osztályok részére

1. Megegyezik a matematika I. tantervű osztályok 3. feladatával.

2. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $p$, $q$ pozitív egész számra

$$\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{4q^2}.$$

3. Az $ABC$ háromszög $AB$, $BC$, $CA$ oldalaira kifelé rendre az $ARB$, $BPC$, $CQA$ háromszögeket rajzoljuk. Az $ARB$ háromszög $A$-nál és $B$-nél levő szöge $15°$, a $BPC$ háromszög $B$, illetve $C$ csúcsánál levő szöge $45°$, illetve $30°$, végül a $CQA$ háromszög $C$ és $A$ csúcsánál levő szöge rendre $30°$ és $45°$. Bizonyítsuk be, hogy a $PR$ és $RQ$ szakaszok egymásra merőlegesek és egyenlő hosszúak!