Az idei olimpiát a Jugoszláv Matematikusok, Fizikusok és Csillagászok Szövetsége rendezte meg Belgrádban 1977. július 1. és 13. között. A diákolimpián 4 földrész 21 országa (Algéria, Amerikai Egyesült Államok, Ausztria, Belgium, Bulgária, Csehszlovákia, Finnország, Franciaország, Hollandia, Jugoszlávia, Kuba, Lengyelország, Magyarország, Mongólia, Nagy-Britannia, Német Demokratikus Köztársaság, Német Szövetségi Köztársaság, Olaszország, Románia, Svédország és Szovjetunió) összesen 155 tanulója vett részt.

\epsfbox{1977-2-1.eps}{foto}

A magyar csapat tagjai: 1. sor (balról) Bodó Zalán; Iványos Gábor, Magyar Zoltán, Csikós Balázs. 2. sor (balról) Knébel István, Balázs Iván József, Seress Ákos, Homonnay Géza.

Minden ország csapata 8–8 tagból állt, kivéve a következőket: Belgium 7, Kuba 4, Olaszország 5, Algéria 3 versenyzővel képviseltette magát. Az olimpia iránti fokozott érdeklődést mutatja, hogy soha még ennyi ország nem szerepelt. A versenyeken képviseltette magát Brazília aki a jövőben ugyancsak részt szeretne venni az olimpián.

A két írásbeli dolgozatot a versenyzők július 6-án és 7-én írták. Mindkét nap 3–3 feladatot kellett megoldaniuk, a munkaidő 4–4 óra volt.

A feladatok a következők voltak:

1. Adott $ABCD$ négyzet oldalaira befelé megrajzoljuk az ABK, BCL, CDM, és DAN egyenlő oldalú háromszögeket.

Bizonyítsuk be, hogy a KL, LM, MN és NK szakaszok felezőpontjai az AK, BK, BL, CL, CM, DM, DN és AN szakaszok felezőpontjaival együtt egy szabályos tizenkétszög csúcspontjai!

2. Egy valós számokból álló véges sorozatban bármely 7, közvetlenül egymást követő tag összege negatív; míg bármely 11, közvetlenül egymást követő tag összege pozitív.

Állapítsuk meg egy ilyen sorozatban a tagok számának maximumát!

3. Legyen n adott, 2-nél nagyobb természetes szám! Jelöljük V_n-nel azt a halmazt, amelynek elemei: $1+kn$, ahol $k=1,2,\ldots$. Egy $m\in V_n$ számot V_n-ben felbonthatatlannak mondunk, ha nincsenek olyan $p,q\in V_n$ számok, amelyekre $pq=m$.

Bizonyítsuk be, hogy van olyan $r\in V_n$ szám, amely több, mint egyféleképpen állítható elő V_n-ben felbonthatatlan számok szorzataként! (Azokat a felbontásokat, amelyek csak a V_n-ből vett tényezők sorrendjében különböznek egymástól, azonosnak vesszük.)

4. Legyenek a, b, A és B adott valós számok, továbbá legyen

$$f(x)=1-a\cdot\cos x-b\cdot\sin x-A\cdot\cos 2x-B\cdot\sin 2x.$$

Ismeretes, hogy x minden valós értéke esetén $f(x)\geq 0$.

Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$a^2+b^2\leq 2\qquad\text{és}\qquad A^2+B^2\leq 1.$$

5. Legyenek a és b pozitív egész számok! Ha (a^2+b^2)-et elosztjuk $(a+b)$-vel, a hányados q, a maradék pedig r lesz. Állapítsuk meg az összes olyan a, b számpárt, amelyre $q^2+r=1977$.

6. Legyen f olyan függvény, amely értelmezve van minden n természetes számra, és amelynek függvényértékei is természetes számok! Álljon fenn továbbá az

$$f(n+1)>f\big(f(n)\big)$$

egyenlőtlenség ugyancsak minden n-re!

Bizonyítsuk be, hogy ekkor minden n természetes számra: $f(n)=n$.

Az I. díjért 40–34, a II. díjért 33–24, a III. díjért 23–17 pontot kellett elérniük a versenyzőknek. A versenybizottság összesen 77 díjat adott ki: 13 első, 29 második és 35 harmadik díjat.

\epsfbox{1977-4-1.eps}{foto 6db}

A magyar csapat versenyzői a következő eredményt érték el:

I. díjat kapott Magyar Zoltán (34 pont).

II. díjat kaptak: *Homonnay Géza* (29 pont). *Knébel István* (31 pont), *Seress Ákos* (33 pont).

III. díjat kaptak: *Balázs Iván József* (23 pont) és *Bodó Zalán* (17 pont).

A diákolimpia zsűrije az egyes feladatok ötletes, különösen elegáns megoldásáért összesen 6 külön díjat adott ki.

A magyar csapat tagjai közül a 3. feladat megoldásáért külön díjat kapott *Iványos Gábor.*

A nem hivatalos pontverseny szerint az országok sorrendje a következő: 1. Amerikai Egyesült Államok 202, 2. Szovjetunió 192, 3–4. Anglia, Magyarország 190, 5. Hollandia 185, 6. Bulgária 172, 7. Német Szövetségi Köztársaság 165, 8. Német Demokratikus Köztársaság 163, 9. Csehszlovákia 161, 10. Jugoszlávia 159, 11. Lengyelország 157, 12. Ausztria 151, 13. Svédország 137, 14. Franciaország 127, 15. Románia 122, 16. Finnország 88, 17. Mongólia 48, 18. Kuba 38, 19. Belgium 33, 20. Algéria 17, 21. Olaszország 15 pont.

Az olimpiák rendezését a Román Szocialista Köztársaság kezdeményezte 1959-ben; a jövő évi, 20. olimpia megrendezését is ők vállalták.