

1976. szeptemberében tűztük ki a következő feladatot. F. 2050. A minden valós számra értelmezett f függvényről tudjuk, hogy minden $a < y < b$ mellett

$$(1) \quad \min(f(a), f(b)) < f(x) < \max(f(a), f(b))$$

teljesül. Következik-e ebből, hogy f monoton?

A válasz igen, de mint az az 1977 januárjában közölt megoldásból kiderül, a bizonyítás – legalábbis ha el akarjuk kerülni a hosszadalmas diszkussziót – nem nyilvánvaló. A következő számban (1977. február) egy hibás megoldást közöltünk, amelynek az alapgondolata a következő volt. Válasszuk meg a tetszőleges $x_1 < x_2$ számokhoz az a, b, c számokat úgy, hogy $a < x_1 < b < x_2 < c$ legyen. Akkor ha $f(a) < f(b)$, $f(x_1) < f(x_2)$, ha pedig $f(a) > f(b)$, $f(x_1) > f(x_2)$. Kérdésünkre, hogy hol a hiba, *Lévai Pál* olvasónk többek között a következőt válaszolta:

Hogyan is szól a „megoldás”? „Legyen $x_1 < x_2$ egyébként tetszőleges, és $a < x_1 < b < x_2 < c \dots$ Tegyük fel, hogy $\min(f(a), f(b)) = f(a) \dots$ ” Ez a feltevés helyes lenne, ha a megoldó csak a tetszőleges, de már *kiválasztott* x_1 és x_2 -höz tartozó a -ra és b -re vonatkoztatná. Ugyanis ez a feltevés valójában csak annyit von maga után, hogy a már kiválasztott x_1 -re és x_2 -re $f(x_1) < f(x_2)$. Azonban nem magától értetődő, nem evidens, tehát bizonyításra szorul, hogy egy másik számpárra, x_3 -ra és x_4 -re $d < x_3 < e < x_4 < g$ esetén most már $\min(f(d), f(e)) = f(d)$ is következik a $\min(f(a), f(b)) = f(a)$ feltevésből. Akkor pedig az esetleges következmény, $f(x_3) < f(x_4)$ is kétséges, kérdéses. Valójában $\min(f(a), f(b)) = f(a)$ -ból és a feladat feltételéből tényleg következik $\min(f(d), f(e)) = f(d)$ s így $f(x_3) < f(x_4)$ is, azonban éppen ennek belátása a feladat, s ez maradt ki ebből a „megoldásból”.

Hasonló magyarázatot küldött *Filakovszky Péter* olvasónk. Mindkettőjük válasza helyes, a közölt „megoldás” valóban csak azt mutatja meg, hogy tetszőleges x_1, x_2 mellett vagy $f(x_1) < f(x_2)$, vagy $f(x_1) > f(x_2)$, de nem zárja ki annak a lehetőségét, hogy az egyenlőtlenség iránya különböző x_1, x_2 párokra különböző legyen.