„Semmiből egy újj más világot...”

(Bolyai János születésének 175. évfordulójára)

Írd meg nekem postán... amit csak lehet, a fontosabbat a Ceres[1] pályájáról... Ezenközben én is egy új plánetát indítottam el a Földre, de... pályáját meghatározni nem tudom; Isten szép fiúgyermekkel ajándékozott meg, 1802. X^{br} 15-én[2] Jánosnak kereszteltük... egészséges, nagyon szép gyermek, vonásai finomak, haja és szemöldöke fekete, égő sötétkék szeme olykor úgy sziporkázik, mint két drágakő;... (Bolyai Farkas Gausshoz írott leveléből[3])

Amint Bolyai János alakja az időben egyre távolabb kerül tőlünk, annál tisztábban áll előttünk, hogy személyében nem fénytelen bolygó, hanem tündöklő üstökös futott fel a tudomány egére. Olyan zseni, akiből évszázadonként csak néhány születik a földkerekségen. Emléke, mint az igazán nagy embereké, megmarad, mert élete oly szorosan egybefonódott az emberi megismerés fejlődésével, hogy nem beszélhetünk geometriáról anélkül, hogy az ő nevét meg ne említenénk. Amikor a múltba tekintünk, úgy vagyunk, mint az az utazó, aki bizonyos állomásokon megáll, hogy végigtekintse a megtett utat, felidézze annak fontosabb fordulóit, összegyűjtse tapasztalatait, s egyben tervezzen is a jövőre. Bolyai János születésének 175. évfordulóján ebben a szellemben hívom meg az olvasót egy rövid beszélgetésre. Hallgassuk meg, mit mond el leveleiben az apa, Bolyai Farkas, arról a korról, amelyben fiának felfedezése megszületett. Bolyai Jánostól is idézünk, végül pedig egy modellt szerkesztünk arra a világra, amelyben a Bolyai-féle geometria törvényei érvényesek.

Bolyai Farkas – ifjabb Kemény Simon mentoraként[4] – három évet töltött el a híres göttingai egyetemen. Ott ismerkedett meg korának matematikai eredményeivel, és ott kötött egész életre szóló barátságot a szintén ott tanuló Carl Friedrich Gauss-szal, a matematikusok későbbi „fejedelmével”.

Hazatérve Keményéknél vállalt nevelői állást, ami lehetővé tette, hogy „meglehetős nyugalomban és függetlenül”[5] élhessen. 1801-ben vette feleségül Benkő Zsuzsannát, és egy évre rá született János fiuk. 1804-ben hívta meg a marosvásárhelyi kollégium, matematika, fizika és kémia tanárának. Élete ettől fogva a kollégiumhoz kötődött, s 47 évet töltött el ott a katedrán.

Farkasnak sok terve volt a matematika tanításának megjavítására. Könyveket kért Gausstól, könyveket akart írni. A mindennapi gondok, az érdektelen környezet azonban bénítólag hatott rá:

> „Itt senkinek sem kell a Matematika; tanítványaim közül csak kevésnek van igazi érzéke hozzá, művemet makulatúrának, csomagolásra és hasonlókra használom... ”[6]

Ilyen körülmények között nem csoda az a lemondó, kritikus hang, amellyel tudományos pályáját illeti.

Az életével számot vető férfi számára fiában csillan meg a remény. A tehetséges gyermek talán megvalósíthatja apja álmait. S bár – mint mondta – fia életútjának meghatározására nincs lehetősége, mégis mindent megtett, hogy az indulás sikeres legyen:

> „... először Eukliddel kezdtem, aztán megismerte Eulert, most meg már Vegának... nemcsak az első két kötetét tudja teljességgel, de járatos a harmadik, negyedikben is, kedveli a differenciál- és integrálszámítást és rendkívüli készséggel és könnyedén számol velük, amily könnyedén vezeti a vonót a hegedűconcertók nehéz futamaiban.”[7]

Az apa a folytatásról is gondoskodni akart, s úgy tervezte, hogy az éleseszű fiút 15 éves korában Gausshoz küldi tanulni néhány évre. A tanulmányút azonban anyagi okok miatt nem valósult meg.

1818. augusztusában Bécsben találjuk az ifjú Bolyait, aki a császári és királyi mérnökakadémián folytatta tanulmányait. Mivel a tehetséges ifjú sok mindent tudott már az anyagból, azért arra is volt ideje, hogy apja tiltakozása ellenére – „az Istenért kérlek! hagyj békét a paralléláknak”, írta Bolyai Farkas[8] – a párhuzamosok elméletéről gondolkodjék. Nincs tudomásunk annak a szellemi fejlődésnek a részleteiről, amelyen Bolyai János keresztülment. Az azonban biztos, hogy az Akadémia kiváló befejezése után a temesvári erődítéshez beosztott alhadnagy 1823. november 3-án levelet írt édesapjának. A levél négyötöd része a kéttagú kifejezések törtkitevőjű hatványának végtelen sorba való fejtésével foglalkozik, s a levél végén találjuk azt a néhány, híressé vált sort, amely egy új geometria megszületéséről tudósít:

> „...mihelyt... mód lesz, a parallelákról egy munkát adok ki;... olyan felséges dolgokat hoztam ki, hogy magam elbámultam... most többet nem szólhatok, csak annyit: hogy semmiből egy újj más világot teremtettem.”[9]

---

[1] Kisbolygó, amelynek pályáját Gauss számította ki.

[2] December 15-én.

[3] Bolyai-levelek. Válogatta, a bevezető tanulmányt írta és a jegyzeteket összeállította Benkő Samu. Kriterion Könyvkiadó, Bukarest, 1975. – 12. levél, 49. old.

[4] idősebb diák, aki fiatalabb társának tanulótársa, házitanítója, felügyelője volt.

[5] 10. levél, 42. old.

[6] 41. levél, 188. old.

[7] 19. levél, 81. old.

[8] 28. levél, 123. old.

[9] 32. levél, 158. old.

Bármilyen képzett volt matematikailag Bolyai Farkas, s bármennyire is saját kutatási témájáról volt szó, ebbe az új világba nem tudta követni fiát. Azért, hogy bizonyosságot szerezzen, ismét Gausshoz fordult, és elküldte neki János munkájának, az Appendixnek[10] a különlenyomatát.

> „Az ő kérésére küldöm ezt az ő kis munkáját Hozzád: légy szíves, ítéld meg éles, átható szemeddel, s válaszodban, melyet epedve várok, írd meg kímélés nélkül magas ítéleted... Fiam többre becsüli a Te ítéletedet, mint egész Európáét."[11]

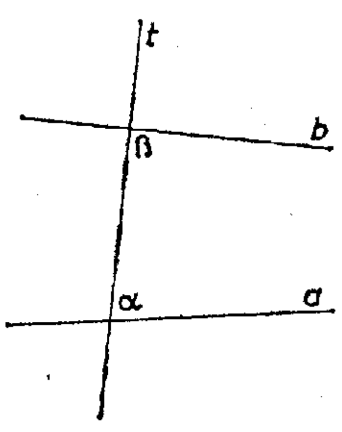
Gauss valóban kímélet nélkül ítélte meg a művet. Nem volt kétséges: matematikailag kifogástalan, korszakalkotó munkát tartott kezeiben, de

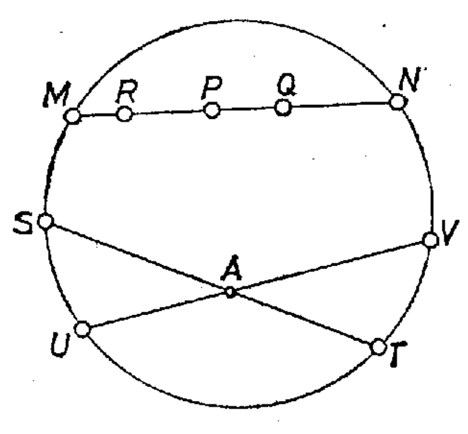
> „az eredmények... majdnem végig megegyeznek részben már 30–35 év óta folytatott elmélkedéseimmel... Nagyon meglepett tehát, hogy most már a fáradságtól megkímélhetem magam, és nagyon örvendek, hogy éppen régi barátom fia az, aki engem ilyen csodálatos módon megelőzött."[12]

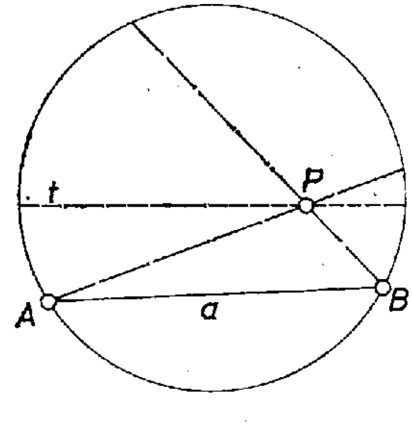
Gauss tehát jogot formált az új geometriai eredményekre, s ezt az inkorrekt viselkedést a szenvedélyes természetű János sohasem bocsátotta meg neki. Kedélyállapota megromlott, a katonai szolgálatot nem tudta elviselni, s ezért 1833 nyarán megvált a hadseregtől és nyugállományba vonult. Atyjával is meggyengült addig zavartalan barátsága: vitáik, heves összecsapásaik voltak. Bolyai János visszahúzódásához az is hozzájárult, hogy 1844-ben megtudta: geometriáját egy addig ismeretlen orosz matematikus, N. I. Lobacsevszkij is felfedezte. Magához a műhöz[13] csupán 1848 októberében jutott hozzá, és igyekezett felfedezni, vajon nem az ő könyvét írta-e át valaki. Meg kellett azonban győződnie arról, hogy önálló gondolkodóval áll szemben, s ezért – igen tárgyilagosan – dicséri azokat a helyeket, amelyeket különösen szépnek talál Lobacsevszkijnél. A 48-as szabadságharc gondolataival egyetértett, a tényleges katonáskodásban azonban betegsége megakadályozta. 49 után még jobban magába zárkózott, több nehéz matematikai kérdéssel foglalkozott sikertelenül. Hosszas betegeskedés után halt meg 1860. január 27-én.

Mi az az új világ, amelyet Bolyai János teremtett?

I.e. 300 óta a geometria alapjait Eukleidész *Elemek* című munkájának felfogása szerint tanítjuk. A görögök szellemi vívmánya volt az addig csak empirikusan, jól-rosszul felismert tételek bizonyításának igénye. Így pl. Eukleidészre vezetik vissza Pitagorasz tételének területátalakításon nyugvó bizonyítását. Eukleidész módszere az, hogy miután a tanulni kívánó személlyel megállapodott bizonyos alaptételekben (axiómákban, illetve posztulátumokban), minden más tételt már szigorú logikával bebizonyít neki. Az alaptételek olyan, maguktól értetődő tények, amelyeket mindenki átlát és bizonyítás nélkül elfogad. Ezeken az alaptételeken nyugszik az elmélet egész rendszere. Ha bizonyítás nélkül elfogadjuk, hogy két ponton át mindig fektethető egyetlen egyenes, van három pont, ami nem fekszik egy egyenesen, bármely szakasz meghosszabbítható, egy egyenes három pontja közül egy és csak egy van a másik kettő között stb., akkor ezekre az alaptételekre már állítások rendszere építhető. Eukleidész jó alaptételeket választott, mert azok szemléletesek, egyszerűek, maguktól értetődők voltak, érvényességükhöz kétség nem fért. Egy alaptétele, azonban az ún. ötödik posztulátum, állandóan nyugtalanította a matematikusokat, mert bár a szemléletnek jól megfelelt, tapasztalatilag mégsem volt ellenőrizhető. Az ötödik posztulátum így szól: Ha két egyenes (a és b) egy közös harmadikat (t) úgy metsz, hogy a t egyenes egyik oldalán fekvő belső szögek (ábránkon α és β) összege kisebb 180°-nál, akkor a két egyenes metszi egymást, mégpedig az átmetszőnek azon az oldalán, ahol a szögek összege kisebb, mint 180°. (Ezzel a posztulátummal egyenértékű a következő állítás: egy egyenessel egy rajta kívül fekvő ponton át csak egy párhuzamos húzható.) Ennek az alaptételnek az a gyengéje, hogy ha $\alpha + \beta$ igen közel van a 180°-hoz, akkor nem tudjuk ellenőrizni, hogy a két egyenes tényleg metszi-e egymást.







[10] Bolyai János: Appendix. A tér tudománya. Szerkesztette, bevezetéssel, magyarázatokkal, kiegészítésekkel ellátta Kárteszi Ferenc. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1973.

[11] 36. levél, 170. old.

[12] Idézi Alexits György: Bolyai János. Művelt Nép Könyvkiadó, Budapest, 1952.
56. old.

[13] Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien, 1840. Magyarul: N. I. Lobacsevszkij: Geometriai vizsgálatok a párhuzamosok elméletének köréből. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1951.

Gyakorlati kérdés ez: azt kellene pl. csillagászati mérésekkel eldönteni, hogy két, egymáshoz igen kevéssé hajló fénysugár nem találkozik-e valahol több milliárd fényévnyi távolságban. Ez pedig nem lehet „úgy látszik" kérdése, ez ténykérdés. Gauss és Lobacsevszkij megpróbált méréseket végezni az ötödik posztulátum érvényességének eldöntésére, azonban kiderült, hogy mérőműszereik a fellépő nagy távolságok miatt erre alkalmatlanok. Bolyai és Lobacsevszkij kiemelte a geometriának ezt az alapkövét és helyére egy másik axiómát tett, majd megnézte: építhető-e geometriai rendszer az új alapra. Úgy találta, hogy igen. Az új geometria – annak ellenére, hogy sokszor meglepő tételekből áll – ellentmondásmentes és ugyanolyan jó lehet egy világ leírására, mint a régi, megszokott, Eukleidész-féle geometria. Ezzel világossá vált, hogy a tér valódi geometriája nem az emberi szellem találmánya, nem szemléletünk által a világra rátukmált elmélet, hanem az anyagnak tudatunktól független megjelenési formája. Azt, hogy ez valójában milyen, mi nem mondhatjuk meg, hanem megfigyelések segítségével kell megállapítanunk. Ezek a komoly természetfilozófiai következmények lehettek az okai annak, hogy Gauss nem tette közzé azokat az eredményeit, amelyeket Bolyaitól függetlenül is tudott.

Az új geometria, az új világ, sok meglepetést tartogat a látogató számára. Próbáljunk ezért egy keveset megmutatni belőle. Dolgunk nem lesz könnyű. Ha azt az euklidészitől szintén eltérő, vagyis nem-euklidészi geometriát akarjuk szemléltetni, ami a gömb felületén érvényes, akkor semmi gondunk sincs. Valamilyen anyagból elkészítünk egy gömböt, megjelölünk rajta pl. két pontot, a két pont között kifeszítünk egy fonalat, s ez lesz egy „egyenesszakasz". Három pontot „egyenesszakaszokkal" összekötve háromszöget szerkeszthetünk Két „egyenes" szögét a metszéspontban meghúzott érintők szögével mérjük. Kiderül, hogy a gömbi geometriában az „egyenesek" hossza véges (ti. egy gömbi főkör hosszával egyenlő), bármely két „egyenes" metszi egymást (tehát nincsenek párhuzamos „egyenesek"), a gömbre rajzolt háromszögek szögeinek összege nagyobb 180°-nál stb.

A Bolyai-féle geometriával azonban más a helyzet. D. Hilbert 1901-ben bebizonyította, hogy ez az úgynevezett hiperbolikus síkgeometria teljes egészében nem modellezhető a háromdimenziós tér valamilyen felületén. Más módszerhez kellett tehát folyamodni.

Képzeljük el, hogy a hiperbolikus síkgeometria világát egy óriási kicsinyítésű optikai eszközzel (amit talán makroszkópnak hívhatnánk) akkorára kicsinyítjük, hogy belefér egy körbe. A hiperbolikus sík pontjait így a körlemez belső pontjai ábrázolják, míg a körvonal pontjai a végtelent jelképezik és nem számítjuk hozzá őket a hiperbolikus geometria világához. Ennek a lekicsinyített világnak az „egyenesei" a kör (végpontok nélkül számított) húrjai (az ábrán az UV húr – az U és V pont nélkül – jelenti az a „egyenest"). Világos, hogy a modell P és Q pontján át egyetlen egy e „egyenes" fektethető, van három pont, amely nem illeszkedik egy „egyenesre". Egy „egyenes" három pontja közül mindig csak egy fekszik a másik kettő között (pl. P a Q és R között). Egy „szakasz" mindig meghosszabbítható, mert a „szakasz" egyik végpontja és a körvonal közé mindig beszúrható még egy pont. Ha a P és Q pontok d távolságát a

$$d = c\left|\lg\frac{\overline{MP}\cdot\overline{NQ}}{\overline{MQ}\cdot\overline{NP}}\right|$$

képlettel értelmezzük, akkor az „egyenesek" végtelen hosszúak, és ha egy szakasz két részből áll, akkor a teljes hossza a két rész hosszának összege. A szögeket hasonló típusú képlettel mérve minden eszközünk megvan ahhoz, hogy e geometriát felépítsük.

Mi a különös ebben a geometriában? Az, hogy egy „egyenessel" egy rajta kívül fekvő ponton át két „párhuzamos" húzható, azaz két olyan „egyenes" van, amely a felvett „egyenest" a „végtelenben", azaz a körvonalon metszi (ábránkon a PA és PB „egyenesek" „párhuzamosak" az $a = AB$ „egyenessel"). Ezenkívül végtelen sok „egyenes" (az ábrán pl. a t egyenes) ultraparalel, mivel az a „egyenest" nem metszi, és nem is párhuzamos vele.

Egész könyvet tölt meg a Bolyai János által felfedezett geometria ismertetése. Még a tételek felsorolása is meghaladja egy megemlékezésre szánt cikk kereteit. Csak az lehetett a célom, hogy a jelen évforduló kapcsán néhány vázlatos vonással ráirányítsam a Lapok olvasóinak figyelmét egy egykori tizenéves fiatalemberre, aki eszménykép lehet mindazok számára, akik életüket az igazság és a világ megismerésére kívánják felhasználni. Adjon kedvet ez a néhány sor a témában való alapos elmélyedésre!