Tudnivalók. A sorozat első három része az 53. kötet 2. szám 49-52. oldalán, 54. kötet 1. szám 1-3. oldalán, 54. kötet 5. szám 193-197. oldalán található.

A feladatok megoldására pontversenyt nem írunk ki, de a legjobb megoldók között könyvutalványokat sorsolunk ki. A megoldásokat kérjük a lap megjelenését *követő hónap 20-ig* a szerkesztőség címére (1443 Budapest, Postafiók 129) beküldeni. A borítékra írják rá megoldóink: Pell-féle egyenletek. A megoldásokat nem szükséges külön lapra írni, de mindig írják ki, hogy melyik feladat megoldása következik. Bár a feladatok egymásra épülnek, nem szükséges mindegyiket megoldani. Egyes feladatokat úgy is megoldhatunk, hogy elfogadjuk az előző feladatok állításának helyességét. Az új feladatok kitűzésénél figyelembe vesszük a beküldött megoldások tapasztalatait is; éppen ezért kérjük megoldóinkat, hogy a feladatokkal kapcsolatban minden véleményt, felmerült kérdést írjanak meg.

A III. rész feladataira helyes megoldást küldtek be: Balázs Iván József, Bodó Zalán, Hajnal Péter, Spissich László, Szabó Sándor.

A III. részben kitűzött feladatok megoldása

Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy a 11. feladatban hibásan szerepelt az, hogy k természetes szám (bár így is igaz az állítás), k-ról csak annyit köthetünk most ki, hogy egész szám. (Ez a hiba, sajnos a megoldókat megzavarta.) A hiba módosítja a 12. feladatot úgy, hogy itt k helyett $|k|$-et kell szerepeltetni. Ugyancsak elírás volt a 14. feladatban is, ahol nem a 12., hanem a 13. feladatra kell hivatkozni, valamint $\overline{\gamma}$ helyett γ-nak kell állnia. (Ez a hiba nem zavart, a feladat szövegéből azonnal világos volt, hogy mit kell bizonyítani.)

A továbbiakban a helyes szöveget írjuk.

10. feladat. Legyen D olyan egész szám, amelyre $\sqrt{D}$ irracionális. Bizonyítsuk be, hogy ha $|p/q-\sqrt{D}|<1/q^2$ (ahol p egész és q természetes szám), akkor

$$|p+q\sqrt{D}|<1/q+2q\sqrt{D} \qquad \text{és} \qquad |p^2-q^2D|<1+2\sqrt{D}.$$

Megoldás. Az abszolút értékre vonatkozó egyenlőtlenségből

$$|p+q\sqrt{D}|=|p-q\sqrt{D}+2q\sqrt{D}|\le|p-q\sqrt{D}|+2q\sqrt{D}$$

következik. Feltétel szerint a jobb oldal első tagja kisebb, mint $1/q$, ami éppen az első egyenlőtlenséget bizonyítja. Mivel pozitív számokra vonatkozó egyenlőtlenségek megfelelő oldalainak az összeszorzásával is helyes egyenlőtlenséget nyerünk, ezért a

$$|p+q\sqrt{D}|<1/q+2q\sqrt{D} \qquad \text{és} \qquad |p-q\sqrt{D}|<1/q$$

egyenlőtlenségekből nyilvánvalóan

$$|p^2-q^2\ D|<1/q^2+2\sqrt{D}$$

következik. Ez bizonyítja a második egyenlőtlenséget is, mert q természetes szám és így $1/q^2\le 1$.

11. feladat. Legyen D olyan egész szám, amelyre $\sqrt{D}$ irracionális. Bizonyítsuk be, hogy ekkor van olyan (csak a D-től függő) $k(\neq 0)$ egész szám, amelyhez végtelen sok olyan p_i egész és q_i természetes szám létezik, hogy $\alpha_i=p_i+q_i\sqrt{D}$ eleme a $Z[\sqrt{D}]$ halmaznak és $N(\alpha_i)=k$.

Megoldás. Mivel $\sqrt{D}$ irracionális, ezért az 5. feladat alapján végtelen sok olyan p_i egész q_i természetes számpár létezik, amelyre

$$|p_i/q_i-\sqrt{D}|<1/(q_i)^2.$$

A 10. feladatból tehát az következik, hogy e p_i, q_i számpárokra

$$|p_i^2-q_i^2D|<1+2\sqrt{D}.$$

Mivel $|p_i^2-q_i^2D|$ egész, ezért a szóban forgó $\alpha_i=p_i+q_i\sqrt{D}$ számokra a $N(\alpha_i)=p_1^2-q_i^2D$ csak a $-(1+2\sqrt{D})$ és $(1+2\sqrt{D})$ közötti egész értékeket veheti fel. Ezek száma legfeljebb $1+4\sqrt{D}$, mindenesetre véges. Léteznie kell tehát a skatulyaelv alapján egy olyan k egész számnak, amely $-(1+2\sqrt{D})$ és $(1+2\sqrt{D})$ közé esik, úgy hogy a felsorolt $\alpha_i=p_i+q_i\sqrt{D}$ számok közül végtelen sokra teljesül a

$$N(\alpha_i)=k.$$

12. feladat. Bizonyítsuk be, hogy a 11. feladatban szereplő α_i számok között végtelen sok olyan van, amelyeknél p_i $|k|$-kel osztva ugyanazt az r maradékot adja; továbbá ezek között végtelen sok olyan van, amelyekre a q_i-ket $|k|$-kel osztva mindig ugyanazt az s maradékot kapjuk.

Megoldás. Mindkét állítás bizonyításakor ugyancsak a skatulyaelvet használjuk fel. Tegyük fel, hogy a 11. feladatban meghatározott $\alpha_i=p_i+q_i\sqrt{D}$ számok között minden $0\le r<|k|$ egész számhoz csak véges sok pl. u_r darab olyan volna, amelyre p_i-t $|k|$-kel osztva r maradékot adna. Ez azt jelentené, hogy a 11. feladatban meghatározott α_i számok száma legfeljebb $u_0+u_1+\ldots+u_{|k|-1}$ volna, ami ellentmond a 11. feladatban kapott eredménynek. Így valóban végtelen sok olyan $\alpha_i = p_i+q_i\sqrt{D}$ alakú szám van, amelyre $N(\alpha_i) = k$ és p_i $|k|$-kel osztva maradékul ugyanazt az r számot adja. Ha mármost ezeket osztályozzuk aszerint, hogy a q_i mit ad maradékul $|k|$-kel osztva, akkor azt kapjuk, hogy legalább egy osztályba végtelen sok számnak kell kerülnie, mert az osztályok száma véges. Ezzel bizonyítottuk az állítást.

13. faladat. Legyen D olyan természetes szám, amelyre $\sqrt{D}$ irracionális. Bizonyítsuk be, hogy ekkor léteznek olyan $Z\,[\sqrt{D}]$-beli α és β számok, hogy alkalmas k egész számmal

$$N(\alpha) = N(\beta) = k;$$

továbbá létezik olyan ugyancsak $Z\,[\sqrt{D}]$-beli γ szám, amelyre $\beta = \alpha + k\cdot\gamma$.

Megoldás. A 12. feladat szerint létező végtelen sok szám közül vegyünk ki kettőt. Legyenek ezek:

$$\alpha = p+q\sqrt{D} \qquad \text{és} \qquad \beta = p'+q'\sqrt{D}.$$

Feltétel szerint mindegyik $Z\,[\sqrt{D}]$-ben van, és mindegyikükre teljesül $N(\alpha) = N(\beta) = k$. Ugyancsak az előző feladat állítása következtében p' és q' felírható $p' = ku+p$ és $q' = kv+q$ alakban alkalmas u és v egész számokkal, hiszen $p'-p$ is és $q'-q$ is osztható $|k|$-kel. Így a $\gamma = u+v\sqrt{D}$ számra $\beta = \alpha + k\cdot\gamma$ teljesül, és γ eleme a $Z\,[\sqrt{D}]$-nek.

14. feladat. Bizonyítsuk be, hogy a 13. feladatban szereplő α,β,γ számokra $N(\overline{\alpha}\beta) = k^2$; továbbá a $Z\,[\sqrt{D}]$-beli $\delta = 1+\overline{\alpha}\gamma$ számra $N(\delta) = 1$. Mit jelent ez?

Megoldás. A 13. feladatban szereplő α és β számokra 7. és 9. feladat alapján

$$N(\overline{\alpha}\beta) = N(\overline{\alpha})N(\beta) = N(\alpha)N(\beta) = k^2$$

következik. Ha a β helyébe a 13. feladatban adódott $\alpha + k\cdot\gamma$ kifejezést írjuk, akkor a

$$k^2 = N\big(\overline{\alpha}\cdot(\alpha+k\gamma)\big) = N(\overline{\alpha}\alpha + k\overline{\alpha}\gamma)$$

összefüggéshez jutunk. Mivel $\overline{\alpha}\alpha = N(\alpha) = k$, ezért a 9. feladat eredményét felhasználva

$$k^2 = N(k+k\overline{\alpha}\gamma) = N(k)N(1+\overline{\alpha}\gamma) = k^2\cdot N(\delta)$$

adódik. Ezért $N(\delta) = 1$, mert $k \neq 0$. Ez az eredmény azt jelenti, hogy a $\delta = a+b\sqrt{D}$ számra

$$a^2 - b^2D = N(\delta) = 1;$$

vagyis bebizonyítottuk, hogy a Pell egyenletnek létezik megoldása. Ez a megoldás nem triviális, mert ekkor $\delta = \pm1$ lenne, amiből $\overline{\alpha}\beta = k\delta$ alapján

$$k\alpha = \pm\, k\delta\alpha = \pm\,\alpha\overline{\alpha}\beta = \pm\, k\beta \qquad \text{végül is} \qquad \alpha = \pm\,\beta$$

következne.

Az $\alpha = \beta$ nem lehet, mert α és β különbözőek. Az $\alpha = -\beta$ esetben vissza kell térni a 12. feladathoz. Ott azt láttuk, hogy a feltételnek végtelen sok szám felel meg. Ha tehát egyiknek az α-t választottuk, akkor a β-t úgy választjuk ki a végtelen sok szóba jövő szám közül, hogy $\beta \neq -\alpha$. Ekkor tehát a konstruált $\delta = a+b\sqrt{D}$ mellett valóban nem triviális megoldást kapunk.

A Pell-féle egyenlet végtelen sok megoldásának a meghatározása

Bebizonyítottuk már, hogy a

(P) $$x^2 - Dy^2 = 1$$

alakú Pell-féle egyenletnek rögzített D természetes számra létezik megoldása, ha D nem négyzetszám. (Emlékeztetünk arra, hogy megoldáson csak egész számokból álló számpárt értünk!)

Ha $\alpha = a+b\sqrt{D}$ és $\beta = c+d\sqrt{D}$ mellett

$$N(\alpha) = a^2 - b^2D = N(\beta) = c^2 - d^2D = 1,$$

akkor $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$ alapján ismét megoldást kapunk. Ez a megoldás „általában" különbözik α-tól is és β-tól is. Persze α ismeretében

$$\overline{\alpha} = a-b\sqrt{D}, \quad -\alpha = -a-b\sqrt{D} \quad \text{és} \quad -\overline{\alpha} = -a+b\sqrt{D}$$

ismét megoldást állítanak elő, és nem lehetünk eleve biztosak abban, hogy α, β különbözik a fenti módon kapott számoktól is. Valószínűnek látszik ez például az $\alpha = \beta$ esetben; sőt „érezhető”, hogy az

$$\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \dots,\ \alpha^n,\ \dots$$

végtelen sorozat végtelen sok megoldást ad; kivéve, ha $\alpha = 1$ vagy $\alpha = -1$. Célunk azonban az összes megoldás meghatározása, és ezért nem elégedhetünk meg egy „tetszőleges” α hatványaival. Segítségül azt fogjuk felhasználni, hogy a Pell-egyenlet megoldásai a számegyenesen „elég jól elhelyezhetők”. Egyelőre csak azt tűzzük ki célul, hogy bizonyos módon végtelen sok megoldást kapjunk; azt, hogy ez egyben az összes megoldás, csak a következő folytatásban bizonyítjuk be.

IV. sorozat (végtelen sok gyök megadása)

Feladatok

15. Legyen $\alpha \in Z[\sqrt{D}]$, $|\alpha| \neq 1$, és $N(\alpha) = 1$. Jelölje ε az $\alpha, \overline{\alpha}, -\alpha, -\overline{\alpha}$ számok közül a legnagyobbat. Bizonyítsuk be, hogy

$$-\varepsilon < -1 < -\overline{\varepsilon} < 0 < \overline{\varepsilon} < 1 < \varepsilon.$$

16. Legyen $\varepsilon = a + b\sqrt{D} \in Z[\sqrt{D}]$ olyan, amelyre $N(\varepsilon) = 1$.

Bizonyítsuk be, hogy $\varepsilon > 1$ pontosan akkor teljesül, ha a és b mindegyike pozitív.

17. Bizonyítsuk be, hogy azok között a $Z[\sqrt{D}]$-beli ε számok között, amelyekre $N(\varepsilon) = 1$, és $\varepsilon > 1$, van egy ε_1 legkisebb.

18. Bizonyítsuk be, hogy a 17. feladatban szereplő ε_1 számra bármilyen k egész szám esetén $\varepsilon_k = (\varepsilon_1)^k$ eleme $Z[\sqrt{D}]$-nek és $N(\varepsilon_k) = N(-\varepsilon_k) = 1$.

19. Bizonyítsuk be, hogy a 18. feladatban definiált

$$\dots,\ \varepsilon_{-k},\ \dots,\ \varepsilon_{-1},\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1,\ \dots,\ \varepsilon_k,\ \dots$$

$$\dots,\ -\varepsilon_{-k},\ \dots,\ -\varepsilon_{-1},\ -\varepsilon_0,\ -\varepsilon_1,\ \dots,\ -\varepsilon_k,\ \dots$$

számok valamennyien különböznek egymástól.