I. megoldás. A két szélsőérték létezése azt jelenti, hogy függvényünk deriváltjának két különböző valós zérushelye van, tehát az

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0, \qquad a \neq 0 \tag{2}$$

valódi másodfokú egyenlet diszkriminánsa pozitív:

$$b^2 - 3ac > 0. \tag{3}$$

Jelöljük a függvénygörbének a szélsőértékekhez tartozó pontjait M-mel, illetve N-nel, koordinátáik legyenek $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$. Azt, hogy az MN egyenes átmegy az O origón, úgy is mondhatjuk, hogy az OM és ON egyenes iránytangense egyenlő:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}, \qquad \text{azaz} \qquad x_1y_2 = x_2y_1. \tag{4}$$

Föltehetjük, hogy sem x_1, sem x_2 nem 0, hiszen $x_1 = 0$, $y_1 \neq 0$ esetén $x_2 \neq x_1$ miatt a követelmény nem teljesülhet, lévén az OM egyenes maga az y tengely; ha pedig pl. $x_1 = y_1 = 0$, akkor M és N egyike azonos 0-val, követelményünk semmitmondó. Ezt a föltevésünket az fejezi ki, hogy az x_1-et és x_2-t megadó (2) egyenletben a két gyök szorzatával arányos

$$c \neq 0. \tag{5}$$

Ezek szerint $a \neq 0$, (3), (4) és (5) szükséges és elegendő föltétele annak, hogy M, N és O egy egyenes egymástól különböző pontjai legyenek, azonban még (4) helyére az (1) együtthatói közti feltételt kell keresnünk.

M és N ordinátáját x_1-gyel, ill. x_2-vel kifejezve, (4) így alakul:

$$x_1(ax_2^3 + bx_2^2 + cx_2 + d) = x_2(ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d),$$

amiből rendezéssel, kiemeléssel

$$(x_2 - x_1)\{ax_1x_2(x_2 + x_1) + bx_1x_2 - d\} = 0,$$

és mivel (3) miatt $x_2 - x_1 \neq 0$, azért

$$ax_1x_2(x_2 + x_1) + bx_1x_2 - d = 0.$$

Itt (2) alapján

$$x_1x_2 = \frac{c}{3a}, \qquad x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a},$$

tehát (4) az együtthatókkal kifejezve

$$\frac{bc}{9a} - d = 0, \qquad 9ad = bc. \tag{6}$$

Ez az összefüggés egyébként akkor is teljesül, ha (2)-ben $c = 0$, azaz $x_1 = 0$, $x_2 \neq 0$ és $y_1 = 0$, M azonos O-val, hiszen ekkor (1)-ből $d = 0$.

Összefoglalva: az $a \neq 0$ és (3) föltételek teljesülése mellett a keresett összefüggést (6) adja meg.

Megjegyezzük, hogy (6) megengedi a $d = b = 0$ értékrendszert is, amennyiben a és c ellentétes előjelűek (tehát egyikük sem 0). Ilyen esetben az origó éppen az inflexiós pontja, szimmetriacentruma a függvényt ábrázoló görbének.

Füredi Zoltán (Budapest, Móricz Zs. Gimn. IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. Eredményünket így is kimondhatjuk. Ha a kérdéses függvényben az a, b, c együtthatókat már megválasztottuk úgy, hogy $b^2 - 3ac > 0$ és $a \neq 0$, akkor hozzájuk megválasztható d a követelménynek megfelelően $d = bc/9a$. (A $c = 0$ esetben csak úgy teljesíthető a követelmény, hogy az egyik szélsőérték $x = 0$-ban van.)

2. Az alábbi érdekes, a beérkezett dolgozatok közt egyedülálló megoldást – a szerkesztőségi szokástól eltérően – minden változtatás nélkül közöljük. Ezért előre jegyezzük meg a következőket. Csak $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ egyenlet alakú harmadfokú görbékről van szó. A szerző nem írta fel az együtthatókban a diszkrimináns pozitívságát, de megemlítette a föltevés idevágó részét. Természetesen kimondatlanul is áll $u \neq 0$.

II. megoldás. Az 1595. feladatban[1] megmutattuk, hogy bármely harmadfokú görbének van rajta elhelyezkedő szimmetriacentruma. Bármely harmadfokú görbét eltolhatunk tehát úgy, hogy az origón átmenjen és erre szimmetrikus legyen. És megfordítva: bármely harmadfokú görbe előállítható egy, az origóra szimmetrikus harmadfokú görbe megfelelő eltolásával. Így fogunk most mi is eljárni.

A két szélsőérték létezése egyben azt jelenti, hogy az origóra szimmetrikus görbének még két gyöke van: $\pm u$. Harmadik gyöke 0, így a minden, két szélsőértékkel rendelkező kanonikus egyenletű harmadfokú görbét leíró egyenlet

$$vx(x^2 - u^2) = y. \tag{7}$$

[1] K.M.L. 38 (1969) 9. old.

A két szélsőértéket összekötő egyenes most átmegy az origón, ezért a feladatbeli feltételnek megfelelő összes görbét úgy kaphatjuk meg, hogy (7)-et eltoljuk az egyenes mentén. Felírjuk az origóból az egyik szélsőérték-pontba mutató vektort:

$$y' = 3vx^2 - u^2v = 0,$$

$$x_{1,2} = \pm\frac{u}{\sqrt{3}}, \qquad y_1 = v\left(\frac{u^3}{3\sqrt{3}} - \frac{u^3\cdot 3}{3\sqrt{3}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{3}\cdot 3}u^3v.$$

A vektor $-\frac{\sqrt{3}t}{u}$ skalárral való szorzata tehát

$$\mathbf{a}\left(-t; \qquad +\frac{2}{3}u^2vt\right).$$

„t” valós szám, paraméter. Az összes, a feladatnak megfelelő görbe egyenletét megkapjuk tehát, ha (7)-et eltoljuk $\mathbf{a}$-val:

$$v[(x+t)^3 - u^2(x+t)] = y - \frac{2}{3}u^2vt.$$

Kifejtve, rendezve

$$vx^3 + 3vtx^2 + (3vt^2 - vu^2)x + \left(vt^3 - \frac{u^2t}{3}\right) = y,$$

tehát

$$a = v; \qquad b = 3vt; \qquad c = 3vt^2 - vu^2; \qquad d = vt^3 - \frac{u^2t}{3}:$$

A négy egyenletből „kiejtve” a paramétereket, megkapjuk a kívánt összefüggést. Az első egyenletből kifejezhetjük v-t, a másodikból azután t-t és a harmadikból u-t; végül a kívánt összefüggés

$$9ad - bc = 0.$$

Az átalakítások megfordíthatósága miatt, ha a szélsőértékek valóban léteznek, akkor az összefüggés nemcsak szükséges, de elégséges feltétel is.

Kollár István (Budapest, Móricz Zs. Gimn. IV. o. t.)

III. Megoldás. Mivel a vizsgált $f(x)$ harmadfokú függvénynek mindkét szélsőértéke létezik, azért az

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

függvénynek két különböző valós zérushelye van, tehát

$$a \neq 0 \qquad \text{és} \qquad b^2 > 3ac.$$

Ha valamely u valós számra $f'(u) = 0$, akkor

$$u^2 = -\frac{1}{3a}(2bu + c),$$

amit kétszer alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$f(u) = -\frac{u}{3}(2bu + c) + bu^2 + cu + d =$$
$$= -\frac{b}{3}\cdot\frac{2bu + c}{3a} + \frac{2c}{3}u + d = \left(\frac{2c}{3} - \frac{2b^2}{9a}\right)u + \left(d - \frac{bc}{9a}\right).$$

Eszerint az $(u;\, f(u))$ koordinátájú pont rajta van az

$$y = \left(\frac{2c}{3} - \frac{2b^2}{9a}\right)x + \left(d - \frac{bc}{9a}\right)$$

egyenesen. Mivel a fenti megállapítás mind a két szélsőérték-helyre érvényes, ez az az egyenes, amely az $f(x)$ függvény görbéjének a szélsőértékekhez tartozó pontjait összeköti. Ez az egyenes akkor és csakis akkor megy át az origón, ha

$$d - \frac{bc}{9a} = 0,$$

ez tehát a kérdezett összefüggés.