(III. rész)

Tudnivalók. A sorozat első része az 53. kötet 2. szám 49 – 52. oldalán, a második rész az 54. kötet 1. szám 1 – 3. oldalán található.

A feladatok megoldására pontversenyt nem írunk ki, de a legjobb megoldók között könyvutalványokat sorsolunk ki. A megoldásokat kérjük a lap megjelenését *követő hónap 20*-ig a szerkesztőség címére (1443 Budapest, Postafiók 129) beküldeni. A borítékra írják rá megoldóink: Pell-féle egyenletek. A megoldásokat nem szükséges külön lapra írni, de mindig írják ki, hogy melyik feladat megoldása következik. Bár a feladatok egymásra épülnek, nem szükséges mindegyiket megoldani. Egyes feladatokat úgy is megoldhatunk, hogy elfogadjuk az előző feladatok állításának helyességét. Az új feladatok kitűzésénél figyelembe vesszük a beküldött megoldások tapasztalatait is; éppen ezért kérjük megoldóinkat, hogy a feladatokkal kapcsolatban minden véleményt, felmerült kérdést írjanak meg.

A sorozatot a jövő tanévben is folytatni fogjuk, újabb három részben. A szeptemberi számban közöljük, hogy kik nyertek könyvutalványt.

Az I. rész feladataira helyes megoldás küldtek: Balázs Iván József, Bodó Zalán, Filakovszky Péter, Kiss Margit, Knébel István, Seress Ákos, Spissich László és Szabó Sándor. A II. rész feladataira csak Szabó Sándortól érkezett megoldás (így ő természetesen nagyobb eséllyel vesz részt a sorsoláson). Annak az oka, hogy ilyen kevés megoldás érkezett, talán az lehetett, hogy a II. rész feladatai igen egyszerűek voltak. E feladatokra azonban szükség volt, mert ezek szolgáltatják a technikai alapot a továbbiakhoz.

A II. részben kitűzött feladatok megoldásai

6. feladat. Bizonyítsuk be, hogy az összeadás, kivonás és szorzás sem a $Q[\sqrt{D}]$, sem a $Z[\sqrt{D}]$ halmazból nem vezet ki; továbbá a $Q[\sqrt{D}]$ halmazból nem vezet ki az osztás sem.

Megoldás. Annak a bizonyítása, hogy az összeadás, kivonás és szorzás sem a $Q[\sqrt{D}]$, sem a $Z[\sqrt{D}]$ halmazból nem vezet ki, vagy röviden, hogy e műveletekre zártak, azon fog múlni, hogy ezekre a műveletekre mind a racionális, mind az egész számok halmaza zárt. A végett, hogy a számolásokat ne kelljen mindkét esetben külön elvégezni, egy olyan állítást bizonyítunk be, amely speciális esetként tartalmazza mind a $Q[\sqrt{D}]$-re, mind a $Z[\sqrt{D}]$-re vonatkozó állításunkat.

Legyen H a racionális számoknak egy olyan részhalmaza, amely zárt az összeadásra, kivonásra és szorzásra, és ezen felül tartalmazza a D számot is. Jelölje továbbá $H[\sqrt{D}]$ azokat az $a+b\sqrt{D}$ alakú számoknak a halmazát, amelyekre a is és b is eleme a H halmaznak.

Ha $a+b\sqrt{D}$ és $c+d\sqrt{D}$ elemei $H[\sqrt{D}]$-nek, akkor

$$(a+b\sqrt{D})+(c+d\sqrt{D})=(a+c)+(b+d)\sqrt{D},$$
$$(a+b\sqrt{D})-(c+d\sqrt{D})=(a-c)+(b-d)\sqrt{D},$$
$$(a+b\sqrt{D})\cdot(c+d\sqrt{D})=(ac+bdD)+(ad+bc)\sqrt{D}.$$

Feltétel szerint a, b, c, d, D a H halmaz elemei. Mivel e halmaz az összeadásra, kivonásra és szorzásra zárt, ezért ugyancsak elemei a H halmaznak az

$$a+c,\quad b+d,\quad a-c,\quad b-d,\quad ac+bdD,\quad ad+bc$$

is, ami azt bizonyítja, hogy $H[\sqrt{D}]$ valóban zárt az összeadásra, kivonásra és szorzásra.

Ha most H-nak speciálisan a racionális számok Q vagy az egész számok Z halmazát választjuk, akkor éppen a kívánt állítást kapjuk, mivel D eleme az egészek, és így a racionális számok halmazának is.

Most már csak azt kell bizonyítani, hogy ha $(a+b\sqrt{D})$ és $(c+d\sqrt{D})$ elemei $Q[\sqrt{D}]$-nek, akkor $(a+b\sqrt{D})/(c+d\sqrt{D})$ is eleme; feltéve, hogy a nevező nem 0.

Ennek az állításnak a bizonyítására felhasználjuk a 9. feladat állításának egy részét. Nevezetesen azt, hogy bármely $\alpha=a+b\sqrt{D}$ esetén $N(\alpha)$ racionális, és ha $\alpha\neq 0$, akkor $N(\alpha)\neq 0$ is igaz. Az első állítás azonnal következik a $N(\alpha)=a^2-b^2D$ alapján. A második igazoláshoz tegyük fel, hogy $N(\alpha)=a^2-b^2D=0$. Ebből $b\sqrt{D}=a$ vagy $b\sqrt{D}=-a$ következik. Ha $b=0$, akkor $a=0$ is igaz, amiből $\alpha=0$ is adódik. Egyébként viszont $\sqrt{D}$ racionális szám lenne, ami csak úgy lehetne, hogy D – feltevésünkkel ellentétben – négyzetszám volna.

Az osztásra való zártság bizonyításához visszatérve, azt kell tehát kimutatni, hogy ha $\alpha\neq 0$ és β eleme $Q[\sqrt{D}]$-nek, akkor β/α is eleme. Erre a

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\beta\overline{\alpha}}{\alpha\overline{\alpha}}=\frac{\beta\overline{\alpha}}{N(\alpha)}$$

összefüggést kapjuk, ahol $\overline{\alpha}$ is $Q[\sqrt{D}]$-beli, tehát a szorzásra való zártság alapján $\beta\overline{\alpha}$ is az. Továbbá a jobb oldalon álló tört nevezője 0-tól különböző racionális szám. Az általános esetet tehát arra a speciális esetre vezettük vissza, amikor racionális számmal kell osztani. Ez pedig $\dfrac{a+b\sqrt{D}}{c}=\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}\sqrt{D}$ alapján ismét $Q[\sqrt{D}]$ eleme, mert $c\neq 0$ miatt a/c és b/c is racionális.

7. feladat. Bizonyítsuk be az alábbi összefüggéseket:

$$\overline{(\overline{\alpha})} = \alpha, \quad \overline{(\alpha+\beta)} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}, \quad \overline{\alpha \cdot \beta} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}.$$

Megoldás. Legyen $\alpha = a + b\sqrt{D}$, $\beta = c + d\sqrt{D}$. Ekkor:

$$\begin{gathered}
\overline{(\overline{\alpha})} = \overline{(a - b\cdot\sqrt{D})} = a - (-b\cdot\sqrt{D}) = a + b\sqrt{D} = \alpha; \\
\overline{(\alpha+\beta)} = \overline{(a+c)+(b+d)\sqrt{D}} = (a+c)-(b+d)\sqrt{D} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}; \\
\overline{\alpha\cdot\beta} = \overline{(a+b\sqrt{D})(c+d\sqrt{D})} = \overline{(ac+bdD)+(ad+bc)\sqrt{D}} = \\
= (ac+bdD)-(ad+bc)\sqrt{D} = (a-b\sqrt{D})(c-d\sqrt{D}) = \overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}.
\end{gathered}$$

8. feladat. Bizonyítsuk be, hogy az α-nak az $\overline{\alpha}$ elemet megfeleltetve, a $Q[\sqrt{D}]$-nek egy önmagára való kölcsönösen egyértelmű megfeleltetését kapjuk; továbbá, hogy ez a leképzés pontosan a $Z[\sqrt{D}]$ elemeit képezi le a $Z[\sqrt{D}]$-be.

Megoldás. Mivel $\overline{\alpha}$ is $Q[\sqrt{D}]$-ben van, ezért a megfeleltetés $Q[\sqrt{D}]$-t $Q[\sqrt{D}]$-be képezi le. Azt kell belátni, hogy ez a megfeleltetés mindkét irányban egyértelmű. Az világos, hogy minden elem egyértelműen meghatározza, hogy ő minek a képe. Ehhez azt is be kell látni, hogy $Q[\sqrt{D}]$ minden α eleme kép; ami azonnal adódik, mert a 7. feladat szerint $\overline{(\overline{\alpha})} = \alpha$, és így α az $\overline{\alpha}$ képe. Tegyük most fel, hogy egy elem az α-nak is és a β-nak is képe, azaz $\overline{\alpha} = \overline{\beta}$. Ebből azonnal következik, hogy $\alpha = \overline{(\overline{\alpha})} = \overline{(\overline{\beta})} = \beta$; vagyis a kép egyértelműen meghatározza az eredeti számot.

Ha α eleme $Z[\sqrt{D}]$-nek, akkor, $\alpha = a + b\sqrt{D}$ és az a, b számok egészek. De így a és $-b$ is egészek, amiből kapjuk, hogy $\overline{\alpha} = a - b\sqrt{D}$ is $Z[\sqrt{D}]$-ben van. Ha pedig $\overline{\alpha}$ eleme $Z[\sqrt{D}]$-nek, akkor $\alpha = \overline{(\overline{\alpha})}$ is $Z[\sqrt{D}]$ eleme, tehát a kölcsönös egyértelműség miatt csak a $Z[\sqrt{D}]$-beli számok képe lesz $Z[\sqrt{D}]$-ben.

9. feladat. Bizonyítsuk be, hogy $N(\alpha\cdot\beta) = N(\alpha)\cdot N(\beta)$, $N(\alpha)$ racionális és $Z[\sqrt{D}]$-beli α-ra egész; továbbá $N(\alpha) = 0$ pontosan akkor igaz, ha $\alpha = 0$.

Megoldás. $N(\alpha) = \alpha\cdot\overline{\alpha}$ alapján a 7. feladatban bizonyítottakat felhasználva: $N(\alpha\cdot\beta) = (\alpha\beta)\cdot\overline{(\alpha\beta)} = \alpha\cdot\beta\cdot\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta} = (\alpha\overline{\alpha})\cdot(\beta\overline{\beta})N(\alpha)N(\beta)$, ami bizonyítja a feladat első állítását.

Ha $\alpha = a + b\sqrt{D}$, akkor $N(\alpha) = a^2 - b^2\cdot D$ racionális, mert a, b, D racionálisak. Ha α eleme $Z[\sqrt{D}]$-nek, akkor a, b – és persze D is – egészek, amiből következik, hogy $N(\alpha)$ is egész.

Ha $\alpha = a + b\sqrt{D}$ és $N = N(\alpha) = a^2 - b^2D = 0$, akkor – mint a 6. feladat bizonyításánál láttuk – fennáll az $a = b = 0$, amiből $\alpha = 0$ adódik. $\alpha = 0$ esetén $N(\alpha) = \alpha\cdot\overline{\alpha} = 0$ nyilvánvalóan következik.

A Pell-féle egyenlet egy megoldásának meghatározása

Az első közleményben láttuk, hogy a

$$x^2 - Dy^2 = 1 \tag{P}$$

Pell egyenletnek (ahol D nem négyzetszám) olyan pozitív $x = p$, $y = q$ megoldásait érdemes keresni, amelyre p/q a $\sqrt{D}$-nek jó közelítése. Valóban, $p^2 - Dq^2 = 1$ esetén

$$q < |p + q\sqrt{D}| \quad \text{és} \quad (p - q\sqrt{D}) = 1$$

alapján

$$\left|\frac{p}{q} - \sqrt{D}\right| = \frac{1}{q}|p - q\sqrt{D}| = \frac{1}{q}\frac{1}{|p+q\sqrt{D}|} < \frac{1}{q^2}$$

következik. Márpedig azt láttuk, hogy ilyen tulajdonságú p/q tört végtelen sok van. Említettük azt is, hogy e közelítő törtekből válogatjuk ki azokat, amelyek a (P) egyenlet megoldását szolgáltatják. Célunk most csupán egyetlen ilyen megoldás megkeresése lesz. Ehhez szükségünk van arra, hogy az $a + b\sqrt{D}$ alakú számokkal (a és b racionális számok) különböző műveleteket végezhessünk. E célt szolgálta előző közleményünk.

Mindenekelőtt nézzük meg, hogy ha a p és q egész számok kielégítik a $\left|\frac{p}{q} - \sqrt{D}\right| < \frac{1}{q^2}$ feltételt, akkor mivel lesz egyenlő $p^2 - Dq^2$? Erre néhány táblázatot készítünk. (A táblázatok számítástechnikai segédeszköz igénybevételével készültek; ezek elkészítése, de talán még ellenőrzése is, egyébként igen hosszadalmas és fárasztó volna.) A táblázatok fölé kiírjuk a D számot ($D = 2, 3, 5, 6, 7$), alája sorban a (p, q) számpárt, q-t növekvő sorrendben írva, amíg 100-at el nem éri és a számpár mögé írjuk az $N = N(p + q\sqrt{D}) = p^2 - q^2D$ számot. (1. táblázat).

1. táblázat

$\mathbf{D=2}$	$\mathbf{N}$	$\mathbf{D=3}$	$\mathbf{N}$	$\mathbf{D=5}$	$\mathbf{N}$	$\mathbf{D=6}$	$\mathbf{N}$	$\mathbf{D=7}$	$\mathbf{N}$
(1,1)	−1	(1,1)	−2	(2,1)	−1	(2,1)	−2	(2,1)	−3
(2,1)	2	(2,1)	1	(3,1)	4	(3,1)	3	(3,1)	2
(3,2)	1	(3,2)	−3	(4,2)	−4	(5,2)	1	(5,2)	−3
(4,3)	−2	(5,3)	−2	(7,3)	4	(10,4)	4	(8,3)	1
(7,5)	−1	(7,4)	1	(9,4)	1	(22,9)	−2	(16,6)	4
(10,7)	2	(12,7)	−3	(11,5)	−4	(27,11)	3	(37,14)	−3
(17,12)	1	(19,11)	−2	(18,8)	4	(49,20)	1	(45,17)	2
(24,17)	−2	(26,15)	1	(29,13)	−4	(98,40)	4	(82,31)	−3
(41,29)	−1	(45,26)	−3	(38,17)	−1	(218,89)	−2	(127,4)	1
(58,41)	2	(71,41)	−2	(47,21)	4	(267,109)	3	(254,96)	4
(99,70)	1	(97,56)	1	(76,34)	−4			(590,223)	−3
(140,99)	−2	(168,97)	−3	(123,55)	4				
(239,189)	−1	(265,153)	−2	(161,72)	1				
				(199,89)	−4				
				(322,144)	4				

Néhány további eredményt sorolunk fel (az első közlemény első táblázatában szereplő többi D-re) (2. táblázat).

$\mathbf{D}$	$\mathbf{N}$ értékei növekvő q mellett
8	−4, 1, 4, −4, 1, 4, −4, 1, 4, −4, ...
10	−1, 6, −4, 6, 1, −6, 4, −6, −1, 6, −4, 6, ...
11	−2, 5, 5, 1, 4, −2, 5, 5, 1, 4, ...
12	−3, 4, 1, 4, −3, 4, 1, 4, −3, ...
13	−4, 3, −3, 4, −1, −4, 4, −3, 3, −4, ...
14	−5, 2, −7, −5, 1, 4, −5, 2, −7, −5, 1, ...
15	−6, 1, 4, −6, 1, 4, −6, 1, 4, ...

Mindenekelőtt két megjegyzést teszünk. Láthatjuk, hogy $D = 2, 3, 5, 6, 7$ esetén (és ugyanez igaz a D minden lehetséges értékére) a $q = 1$ érték kétszer lép fel, minden más q legfeljebb egyszer. A felsorolt számoknál előfordul az is, hogy egy-egy p/q tört többször is szerepel. Például $D = 5$ esetében az első sorban $p = 2$, $q = 1$, a harmadik sorban $p = 4$, $q = 2$ és $2/1 = 4/2$. Meghatározható, hogy ezek a jelenségek miért és mikor lépnek fel, de ezek a továbbiakat nem érintik.

Figyeljük meg jól a táblázatokban fellépő $N = N(p + q\sqrt{D}) = p^2 - q^2D$ értékeket. Láthatjuk, hogy nem. kapunk mindig 1-et, de a szereplő számok igen szűk korlátok között mozognak. Észrevehető, hogy a fellépő korlátok a D számtól függenek. Az is látható, hogy e számok periodikusan váltakoznak, ezt később majd bizonyítjuk is, de számunkra most ez nem lényeges.

Először azt fogjuk belátni, hogy ilyen korlát valóban létezik (10. feladat). Ebből majd arra is következtethetünk (11. feladat), hogy vannak olyan α és β $Z[\sqrt{D}]$-beli számok, amelyekre $N(\alpha) = N(\beta)$. Ezzel már majdnem megoldottuk a feladatunkat, mert ebből a 9. feladat alapján $N\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right) = 1$ könnyen levezethető. A baj csak az, hogy $\dfrac{\alpha}{\beta}$ eleme ugyan $Q[\sqrt{D}]$-nek, de nem feltétlen eleme $Z[\sqrt{D}]$-nek (l. a 6. feladatot). A jobb megértés végett nézzük meg, hogy $D = 5$ esetén milyen $\alpha = p + q\sqrt{5}$ mellett lesz például $N(\alpha) = 4$. Ezek, a táblázat alapján: $3 + \sqrt{5}$, $7 + 3 \cdot \sqrt{5}$, $18 + 8 \cdot \sqrt{5}$, $47 + 21 \cdot \sqrt{5}$, $123 + 55 \cdot \sqrt{5}$, $322 + 144 \cdot \sqrt{5}$.

E számok mindegyikét az elsővel elosztva mindig $Q[\sqrt{5}]$ egy elemét kapjuk, de csupán egyetlenegy, a $\dfrac{47 + 21 \cdot \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} = 9 + 4 \cdot \sqrt{5}$ lesz eleme $Z[\sqrt{5}]$-nek. Ha jól megfigyeljük a fellépő p és q számokat, a következőket állapíthatjuk meg: $\alpha_2 = p_2 + g_2 \cdot \sqrt{5}$ és $\alpha_1 = p_1 + q_1 \cdot \sqrt{5}$ esetén ($p_2 = 47$, $q_2 = 21$, $p_1 = 3$, $q_1 = 1$) egyrészt $N(\alpha_2) = N(\alpha_1) = 4$, másrészt az $\alpha_2 - \alpha_1 = 44 + 20 \cdot \sqrt{5}$ felírható $4(11 + 5 \cdot \sqrt{5})$ alakban, vagyis „osztható” az $N(\alpha_1)$ számmal. Ez vezet nyomra a Pell egyenlet egy gyökének megtalálásában. Természetesen ehhez előbb be kell látni, hogy mindig lehet a fenti tulajdonságokkal rendelkező α_1, α_2 párt találni.

III. sorozat. (Egy gyök megadása)

Feladatok

10. Legyen D olyan egész szám, amelyre $\sqrt{D}$ irracionális. Bizonyítsuk be, hogy ha $|p/q - \sqrt{D}| < 1/q^2$ (ahol p egész és q természetes szám), akkor

$$|p + q\sqrt{D}| < 1/q + 2q\sqrt{D} \quad \text{és} \quad |p^2 - q^2D| < 1 + 2\sqrt{D}.$$

11. Legyen D olyan egész szám, amelyre $\sqrt{D}$ irracionális. Bizonyítsuk be, hogy ekkor van olyan (csak a D-től függő) k természetes szám, amelyhez végtelen sok olyan p_i egész és q_i természetes szám létezik, hogy $\alpha_i = p_i + q_i\sqrt{D}$ eleme a $Z[\sqrt{D}]$ halmaznak és $N(\alpha_i) = k$.

12. Bizonyítsuk be, hogy a 11. feladatban szereplő α_i számok között végtelen sok olyan van, amelyeknél p_i k-val osztva ugyanazt az r maradékot adja; továbbá ezek között végtelen sok olyan van, amelyekre a q_i-ket k-val osztva mindig ugyanazt az s maradékot kapjuk.

13. Legyen D olyan természetes szám, amelyre $\sqrt{D}$ irracionális. Bizonyítsuk be, hogy ekkor léteznek olyan $Z[\sqrt{D}]$-beli α és β számok, hogy alkalmas k egész számmal

$$N(\alpha) = N(\beta) = k;$$

továbbá létezik olyan ugyancsak $Z[\sqrt{D}]$-beli γ szám, amelyre $\beta = \alpha + k \cdot \gamma$.

14. Bizonyítsuk be, hogy a 12. feladatban szereplő α, β, γ számokra $N(\overline{\alpha}\beta) = k^2$; továbbá a $Z[\sqrt{D}]$-beli $\delta = 1 + \overline{\alpha\gamma}$ számra $N(\delta) = 1$. Mit jelent ez?