Tudnivalók.

A feladatok megoldására pontversenyt nem írunk ki, de a legjobb megoldók között könyvutalványokat sorsolunk ki. A megoldásokat kérjük a lap megjelenését *követő hónap 20-ig* a szerkesztőség címére (1443 Budapest, Postafiók 129) beküldeni. A borítékra írják rá megoldóink: Pell-féle egyenletek. A megoldásokat nem szükséges külön lapra írni, de mindig írják ki, hogy melyik feladat megoldása következik. Bár a feladatok egymásra épülnek, nem szükséges mindegyiket megoldani. Egyes feladatokat úgy is megoldhatunk, hogy elfogadjuk az előző feladatok állításának helyességét. Mindegyik cikkben ismertetni fogjuk az előző cikk feladatainak a megoldásait. Az új feladatok kitűzésénél figyelembe vesszük a beküldött megoldások tapasztalatait is; éppen ezért kérjük megoldóinkat, hogy a feladatokkal kapcsolatban minden véleményt, felmerült kérdést írjanak meg.

Az I. részben kitűzött feladatok megoldásai

1. feladat: A megadott $\{0\cdot\alpha\}$, $\{1\cdot\alpha\}$, $\ldots$, $\{n\cdot\alpha\}$ számok száma $n+1$, ezek mindegyike a $[0,\ 1)$ intervallumba esik, a törtrész definíciója szerint. Ebben az intervallumban minden szám a megadott n darab $\left[\frac{i}{n},\ \frac{i+1}{n}\right)$ intervallumok valamelyikébe esik ($i=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$). Ha ennek az n intervallumnak mindegyikében a fenti számok közül legfeljebb egy esnék, akkor a fenti számokból legfeljebb annyi volna, ahány intervallumot adtunk meg, azaz legfeljebb n darab. Ez viszont nem így van, ezért kell a fentiek közül legalább egy olyan intervallumnak lennie, amelybe a megadott számok közül legalább kettő esik.

2. feladat: Az első feladat állítása szerint létező két törtrész legyen $\{b_1\cdot\alpha\}$, és $\{b_2\cdot\alpha\}$. Az egyszerűség kedvéért azt is feltehetjük, hogy ezekre $0\le b_1<b_2\le n$ teljesül. Mivel a szereplő törtrészek ugyanabba az $\left[\frac{i}{n},\ \frac{i+1}{n}\right)$ intervallumba esnek, ezért különbségük abszolút értéke kisebb, mint $\frac{1}{n}$. Egyenlőség nem állhat fenn, mert az intervallum két végpontja között éppen $\frac{1}{n}$ különbség, de az $\frac{i+1}{n}$ végpont már nem tartozik az intervallumhoz. Így:

$$\big|\{b_1\cdot\alpha\}-\{b_2\cdot\alpha\}\big|<\frac{1}{n}.$$

A $[b_1\cdot\alpha]=a_1$, és $[b_2\cdot\alpha]=a_2$ jelöléssel, a törtrészt értelmező $\{x\}=x-[x]$ összefüggés szerint a kapott eredményünk

$$|b_1\cdot\alpha-a_1-b_2\cdot\alpha+a_2|<\frac{1}{n}$$

alakba írható. Az $a_2-a_1=p$ és $b_2-b_1=q$ számok nyilván egészek, és ezekre az előző egyenlőtlenség a kívánt

$$|p-q\cdot\alpha|<\frac{1}{n}$$

alakba írható. A jelölés megválasztása szerint $q=b_2-b_1$ pozitív; és legfeljebb n lehet, mert b_2 legfeljebb n és b_1 legalább 0.

3. feladat: A 2. feladatban kapott egyenlőtlenséget a pozitív q számmal végigosztva ismét helyes egyenlőtlenséget nyerünk. Az ott meghatározott p és q számokra ennek a feladatnak a feltételei is teljesülnek, ezekre tehát

$$\big|p/q-\alpha\big|<1/qn$$

összefüggést nyerjük. A feladat állításához tehát elegendő az

$$1/qn\le 1/q^2 \qquad \text{és} \qquad 1/qn\le 1/n$$

egyenlőtlenségek bebizonyítása. Mivel mind q, mind n pozitívak, ezért a két állítás ekvivalens a

$$q\le n \qquad \text{és} \qquad 1\le q$$

egyenlőtlenségekkel. E két egyenlőtlenség pedig éppen a q-ra vonatkozó feltételek szerint igaz.

4. feladat: A 3. feladat állításából azonnal következik a 4. feladaté is, ha egy olyan n természetes számot tudunk találni, amelyre

$$1/n\le\big|p_i/q_i-\alpha\big| \qquad (1\le i\le k).$$

A $\beta_i=\big|p_i/q_i-\alpha\big|$ számok mind különböznek 0-tól mert α – feltevésünk szerint – irracionális. A β_i számoknak tehát létezik reciprokuk; és így a kívánalomnak eleget tesz minden olyan n természetes szám, amely nagyobb az $1/\beta_1,\ \ldots,\ 1/\beta_k$, számok mindegyikénél.

5. feladat: Azt fogjuk belátni, hogy a kívánt tulajdonságú p_i/q_i törtek sorozatát minden határon túl képezhetjük. A 3. feladat állításából, a irracionalitását figyelembe véve következik egy olyan p_i/q_i tört létezése, amelyre

$$0 < \left|p_1/q_1 - \alpha\right| < (1/q_1)^2.$$

Ha már előállítottuk a kívánt tulajdonságú törtek $p_1/q_1, \ldots, p_k/q_k$ sorozatát, akkor legyen $p_{k+1} = p$ és $q_{k+1} = q$, a 4. feladatban előírt p és q számokkal. A 4. feladat első állítása és a irracionalitása miatt p/q eleget tesz a kívánt egyenlőtlenségnek. A 4. feladat második állítása szerint viszont p/q-nak az előző törtek mindegyikétől különböznie kell; vagyis valóban tudunk mindig újabb megfelelő törtet megadni.

A Pell-féle egyenlet kapcsolata az algebrával

Mint már láttuk, a

$$(P) \qquad x^2 - Dy^2 = 1$$

alakú Pell-féle egyenletnél a D rögzített természetes szám, de nem négyzetszám; olyan x, y megoldáspárokat keresünk, amelyek mindegyike egész szám.

Azt is láttuk, hogy ha $D = A^2$ volna, akkor az egyenlet megoldásait azonnal megkaphatjuk az $1 = x^2 - A^2y^2 = (x - Ay)\ \ (x + Ay)$ felbontás segítségével.

A fenti felbontás kézenfekvőnek látszik abban az esetben is, ha D nem négyzetszám. Ekkor azonban csak az alábbi alakú felbontáshoz jutunk:

$$(x - y \cdot \sqrt{D})(x + y \cdot \sqrt{D}) = 1.$$

A felbontás természetesen nem ad módot az egyenlet azonnali megoldására, hiszen itt a bal oldali tényezők egyike sem egész szám. Ennek ellenére várható, hogy a talált felbontás valamilyen segítséget mégis csak nyújt a megoldáshoz. Mielőtt azonban bármilyen próbálkozásba belekezdenénk, először célszerű megtanulni, hogy miképpen számolhatunk a bal oldali tényezőkben előforduló számokkal. Cikkünk mostani részének ez lesz a célja.

II. sorozat. (Algebrai számok)

Elnevezések, jelölések

Tekintsünk egy rögzített D természetes számot, amely nem négyzete valamely egész számnak.

Jelölje $Q[\sqrt{D}]$ azoknak az $a + b \cdot \sqrt{D}$ alakú számoknak a halmazát, amelyekre a és b racionális számok.

$Z[\sqrt{D}]$ azoknak az $a + b \cdot \sqrt{D}$ alakú számoknak a halmazát jelöli, amelyekre a és b egész számok.

A $Q[\sqrt{D}]$-beli $\alpha = a + b \cdot \sqrt{D}$ számhoz hozzárendeljük az $a - b \cdot \sqrt{D}$ számot; s ezt a hozzárendelést egy föléhúzott vonás fogja jelölni. Így $\overline{\alpha} = a - b \cdot \sqrt{D}$.

A $Q[\sqrt{D}]$ bármely α eleméhez elkészíthetjük az $\alpha\overline{\alpha}$ szorzatot; ezt a szorzatot $N(\alpha)$ fogja jelölni.

Feladatok:[1]

6. Bizonyítsuk be, hogy az összeadás, kivonás és szorzás sem a $Q[\sqrt{D}]$, sem a $Z[\sqrt{D}]$ halmazból nem vezet ki; továbbá a $Q[\sqrt{D}]$ halmazból nem vezet ki az osztás sem.

7. Bizonyítsuk be az alábbi összefüggéseket:

$$\overline{(\overline{\alpha})} = \alpha, \qquad \overline{(\alpha + \beta)} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}, \qquad \overline{(\alpha \cdot \beta)} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}.$$

8. Bizonyítsuk be, hogy az α-nak az $\overline{\alpha}$ elemet megfeleltetve, a $Q[\sqrt{D}]$-nek egy önmagára való kölcsönösen egyértelmű megfeleltetését kapjuk; továbbá, hogy ez a leképzés pontosan a $Z[\sqrt{D}]$ elemeit képezi le a $Z[\sqrt{D}]$-be.

9. Bizonyítsuk be, hogy $N(\alpha \cdot \beta) = N(\alpha) \cdot N(\beta)$, $N(\alpha)$ racionális és $Z[\sqrt{D}]$-beli α-ra egész; továbbá $N(\alpha) = 0$ pontosan akkor igaz, ha $\alpha = 0$.

[1] A feladatokat folyamatosan számoztuk. Az első öt feladatot az első részben tűztük ki (Lásd Kömal 53. kötet 7. szám.)