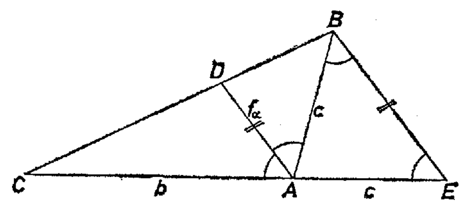
$$(1) \qquad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{\cos\dfrac{\alpha}{2}}{f_\alpha}+\frac{\cos\dfrac{\beta}{2}}{f_\beta}+\frac{\cos\dfrac{\gamma}{2}}{f_\gamma}.$$

Az állítás jobb oldalán álló hányadosok egyszerűen kifejezhetők rendre a háromszög két-két oldalával. Húzzunk párhuzamost az ABC háromszög A-ból induló $AD=f_\alpha$ belső szögfelezőjével B-n át és jelöljük a CA egyenessel való metszéspontját E-vel.



A keletkezett szögpárokból

$$ABE\sphericalangle = BAD\sphericalangle = CAD\sphericalangle = AEB\sphericalangle,$$

tehát az ABE háromszögben $AE=AB=c$, $BE=2\ AB\ \cos(\alpha/2)$, másrészt a CEB és CAD háromszögek hasonlósága alapján

$$\frac{BE}{DA}=\frac{CE}{CA}, \qquad \frac{2c\cos{(\alpha/2)}}{f_\alpha}=\frac{b+c}{b},$$

tehát (1) jobb oldalának első tagja

$$\frac{\cos{(\alpha/2)}}{f_\alpha}=\frac{b+c}{2bc}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}\right).$$

Ebből a betűk ciklikus cseréjével kapjuk a jobb oldal további két tagját, és az állítás helyessége máris nyilvánvaló.

Gáncs István (Győr, Révai M. Gimn.)

Megjegyzés. Tulajdonképpen a szögfelező hosszát fejeztük ki a háromszög legközvetlenebb meghatározó adataival:

$$f_\alpha=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Ehhez a más megoldások a fentinél valamivel több trigonometriai vagy területszámítási összefüggést használtak föl.