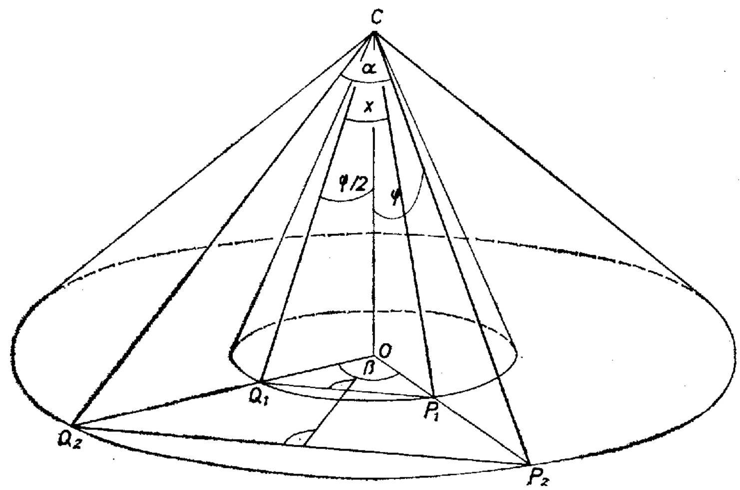
Legyen a kúp csúcsa $C$, alapkörének középpontja $O$, a nagyobb nyílásszögű kúp kérdéses alkotói $CP_2$ és $CQ_2$, továbbá az $OP_2$, $OQ_2$ sugaraknak a kisebb nyílásszögű kúp alapkörén levő pontjai $P_1$, ill. $Q_1$.




Ekkor egyrészt a $P_2CO\sphericalangle = \varphi$ és $P_1CO\sphericalangle = \varphi/2$ félnyílásszögeket, másrészt a $CP_1$, $CQ_1$ alkotók közti $P_1CQ_1 = x$ szöget kell meghatároznunk az adott $P_2CQ_2\sphericalangle = \alpha$-ból, $P_2CQ_2\sphericalangle = P_1CQ_1\sphericalangle = \beta$-ból.

Felhasználjuk, hogy $CP_2O$ derékszögű háromszög, $CP_2Q_2$ és $OP_2Q_2$, valamint $CP_1Q_1$ és $OP_1Q_1$ pedig egyenlő szárú háromszögek. A nagyobbik nyílásszögre

$$\sin\varphi = \frac{OP_2}{CP_2} = \frac{P_2Q_2 : (2\sin\beta/2)}{P_2Q_2 : (2\sin\alpha/2)} = \frac{\sin\alpha/2}{\sin\beta/2}, \tag{1}$$

és ezzel – numerikusan megadott $\alpha$, $\beta$ szögek mellett – a $\varphi/2$ kisebbik nyílásszöget is meghatározottnak tekinthetjük.

Eredményünk átvihető a belső kúpra úgy, hogy $\varphi$ helyett $\varphi/2$-t és $\alpha$ helyett $x$-et írunk:

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\sin x/2}{\sin\beta/2,}$$

és innen az új alkotók közti, keresett szögre

$$\sin\frac{x}{2} = \sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}. \tag{2}$$

Mivel valóságos kúpban az alkotó ($CP_2$, $CP_1$) nagyobb az alapkör sugaránál, azért a $CP_iQ_i$ és $OP_iQ_i$ ($i = 1,\ 2$) háromszögekben $C$-nél kisebb szög van, mint $O$-nál, tehát $\alpha < \beta$, illetve $x < \beta$. Így, ha az adatokra $0° < \alpha < \beta < 180°$, akkor (1) és (2) jobb oldala 0 és 1 közti szám, feladatunk egyértelműen megoldható.

*Megjegyzés.* Tetszetősebb, ha ismeretleneinket egyik alkalmas szögfüggvényük révén az (eredeti) adatok valamelyik szögfüggvényével fejezzük ki. Ehhez (1) alapján

$$\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi} = \sqrt{1-\frac{\sin^2\alpha/2}{\sin^2\beta/2}} = \sqrt{\frac{\cos\alpha - \cos\beta}{1-\cos\beta}},$$

és így a kisebbik nyílásszög közvetlenül

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{1-\cos\beta}}},$$

ebből pedig (2) alapján

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(1+\cos\beta + \sqrt{(1-\cos\beta)(\cos\alpha-\cos\beta)}\right).$$

A kisebbik nyílásszög még másképpen

$$\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{1-\cos\beta} - \sqrt{\cos\alpha-\cos\beta}}{\sqrt{1-\cos\alpha}}.$$

Ezek igazolását az érdeklődő olvasóra hagyjuk.